Propagation dans un milieu à deux couches homogènes - introduction aux couches absorbantes parfaitement adaptées

Nous nous intéressons au problème de Cauchy en 1 dimension d'espace :

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{1}$$

dans le cas particulier où le milieu de propagation est composée de deux milieux homogènes semi-infinis :

$$\rho(x) = \rho_1,\ \mu(x) = \mu_1 \quad \text{si } x < 0, \quad \rho(x) = \rho_2,\ \mu(x) = \mu_2 \quad \text{si } x > 0. \tag{2}$$

Dans chacun des deux milieux, on a donc une vitesse de propagation :

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \text{ dans le milieu } x < 0, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_2}} \text{ dans le milieu } x > 0. \tag{3}$$

On introduit les impédances acoustiques σ_1 et σ_2 de chaque milieu :

$$\sigma_1 = \sqrt{\mu_1\rho_1} \text{ dans le milieu } x < 0, \quad \sigma_2 = \sqrt{\mu_2\rho_2} \text{ dans le milieu } x > 0. \tag{4}$$

Dans la suite nous désignerons par :
- u^1 la restriction de u à $x < 0$,
- u^2 la restriction de u à $x > 0$.

Nous nous contenterons de considérer le cas :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \text{ est régulière à support compact dans } x < 0, \\ u_1 = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Question 1 : On associe à l'équation des ondes (1) le système du premier ordre suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mu^{-1}(x)\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = v_0(x), x \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{6}$$

A l'aide de la formule des sauts, en supposant $u(x,t)$ et $v(x,t)$ de classe C^1 dans chacun des domaines $x < 0$ et $x > 0$ et que (6) est satisfait au sens des distributions, montrer que les deux conditions de transmission suivantes sont satisfaites :

$$\left\{\begin{array}{ll} u^1(0,t) = u^2(0,t) & t > 0, \\ \mu_1\dfrac{\partial u^1}{\partial x}(0,t) = \mu_2\dfrac{\partial u^2}{\partial x}(0,t) & t > 0. \end{array}\right. \tag{7}$$

Question 2 : Avant de résoudre le problème de Cauchy, on effectue une analyse par ondes planes. Soit donc une onde plane harmonique venant des $x < 0$ se propageant dans le domaine 1 :

$$u_1^+(x,t) = u_1^+ exp(i(\omega t - k_1 x))$$

La présence de la discontinuité en $x = 0$ donne naissance à deux ondes, une dite réfléchie $u_1^-(x,t)$ dans le domaine 1 se propageant vers les $x < 0$, l'autre dite transmise $u_2^+(x,t)$ dans le domaine 2 se propageant vers les $x > 0$. Donner l'expression générale de $u_1^-(x,t)$ et $u_2^+(x,t)$. En utilisant les conditions de transmission, montrer que les coefficients d'amplitude de chacune des deux ondes que l'on notera respectivement u_1^- et u_2^+ vérifient :

$$u_1^- = R\, u_1^+ \quad \text{et} \quad u_2^+ = T\, u_1^+$$

avec R (coefficient de réflexion) et T (coefficient de transmission) deux constantes qu'on explicitera. Les 2 coefficients ne dépendant pas de ω que peut-on intuiter pour la solution du problème de Cauchy ?

Question 3 : On se place sous l'hypothèse (5). On démontre que $u^1(x,t)$ (resp. $u^2(x,t)$) est la restriction à $x < 0$ (resp. $x > 0$) d'un problème homogène posé dans tout l'espace, avec données initiales :

$$u^1(x,0) = u_0(x) + u_R(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^1}{\partial t}(x,0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$u^2(x,0) = u_T(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^2}{\partial t}(x,0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

où u_R est à support compact dans $x > 0$ et u_T à support compact dans $x < 0$. Donner l'expression générale de $u^1(x,t)$ et $u^2(x,t)$. En utilisant les conditions de transmission, expliciter $u_R(x)$ et $u_T(x)$. En déduire la solution du problème de Cauchy (1) sous l'hypothèse (5).

Question 4 : Les 6 figures suivantes représentent les instantanés de la solution du problème de Cauchy précédent pour 6 différentes configurations de matériaux. Affecter chaque figure à sa configuration en prenant soin de justifier sa réponse.

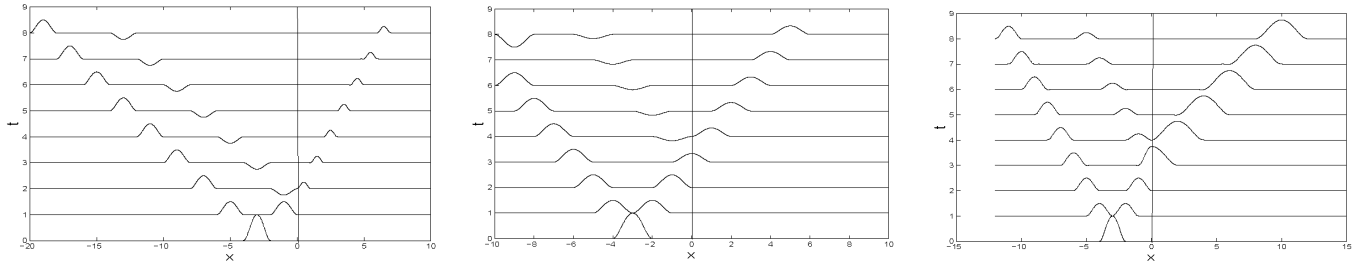

FIG. 1 – Figures 1 2 3

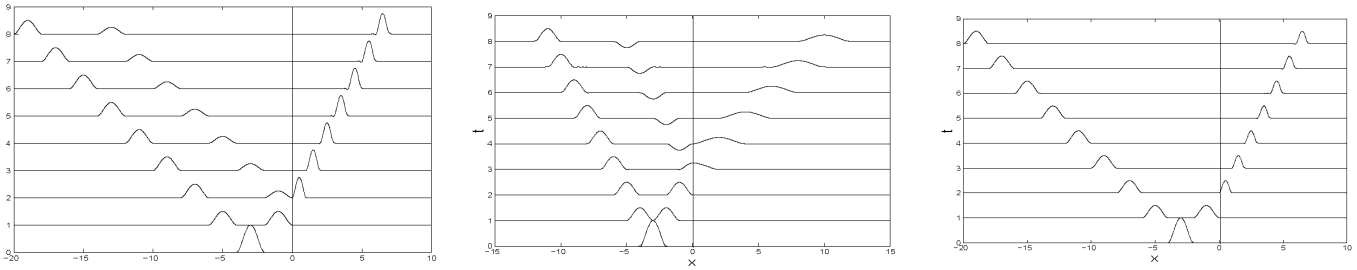

FIG. 2 – Figures 4 5 6

Les configurations matériaux sont :

- Configuration A : $\mu_1 = 3$, $\rho_1 = 3$, $\mu_2 = 2$, $\rho_2 = 1/2$.
- Configuration B : $\mu_1 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\mu_2 = 6$, $\rho_2 = 3/2$.
- Configuration C : $\mu_1 = 6$, $\rho_1 = 3/2$, $\mu_2 = 1$, $\rho_2 = 1$.
- Configuration D : $\mu_1 = 2$, $\rho_1 = 1/2$, $\mu_2 = 3$, $\rho_2 = 3$.
- Configuration E : $\mu_1 = 2$, $\rho_1 = 1/2$, $\mu_2 = 1$, $\rho_2 = 1$.
- Configuration F : $\mu_1 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\rho_2 = 2$.

Question 5 : On appelle couches parfaitement adaptées deux milieux ayant la même impédance (on parle d'adaptation d'impédance). D'après ce qui précède, une onde arrivant à l'interface entre ces deux milieux est entièrement transmise. L'idée (géniale) de Béranger a été d'utiliser cette propriété pour proposer un nouveau modèle de conditions absorbantes au bord des domaines de calcul pour les méthodes volumiques temporelles. Les ondes diffractées par les structures ne reviennent alors pas dans le domaine de calcul et donc ne polluent pas la solution numérique. Evidemment, dans la couche fictive il faut les annuler, ce qui est fait en utilisant des matériaux à pertes qui progressivement vont atténuer l'onde. On se place dans le domaine fréquentiel et on considère une interface entre les matériaux suivants :

$$\rho_1 = \rho, \mu_1 = \mu,\ x < 0 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{\rho}{d(\omega)}, \mu_2 = \mu\, d(\omega),\ x > 0$$

La vitesse dans le milieu 1 est $c_1 = c = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ et dans le milieu 2 $c_2 = c\, d(\omega)$. Pour que le milieu 2 soit absorbant, il suffit que $d(\omega)$ ait une partie imaginaire (avec le bon signe !). Pour revenir facilement dans le domaine temporel, on demande une expression de $d(\omega)$ sous forme de fraction rationnelle de la variable $i\omega$. Soit donc $d(\omega) = \dfrac{i\omega}{i\omega + \sigma}$ avec $\sigma > 0$. Donner l'expression de l'onde transmise à l'interface pour une onde plane harmonique de pulsation ω provenant des $x < 0$ dans le domaine 1. Montrer que l'onde transmise à une décroissance exponentielle dans l'épaisseur de la couche. Quelle est sa vitesse de propagation ? Exprimer l'équation fréquentielle vérifiée par $u_2(x, \omega)$ dans le domaine 2 en fonction de ρ, μ, ω et σ. En posant $v_2(x, \omega) = \mu(i\omega + \sigma)^{-1}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}$, écrire l'équation du second ordre sous forme de système du premier ordre. Montrer

que par transformée de Fourier inverse, on obtient dans le domaine temporel le système suivant :

$$\begin{cases} \rho(x)(\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \sigma u_2) - \dfrac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \\ \mu^{-1}(x)(\dfrac{\partial v_2}{\partial t} + \sigma v_2) - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

En déduire l'équation temporelle du second ordre vérifiée par $u_2(x,t)$. Montrer que l'énergie acoustique décroit dans le milieu 2 au cours du temps. La couche fictive est donc absorbante.