Analyse numérique et optimisation

TD n^{o}5 I. Terrasse

Formulation variationnelle et éléments finis en dimension 1.

Dans les exercices suivants consacrés à la dimension 1, on se placera dans $\Omega =]0, L[$, sur lequel on considérera un maillage uniforme de pas $h = \dfrac{L}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, de sommets $x_j = jh$, $0 \leq j \leq n+1$ et de mailles $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n$.
On notera

$$V = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \text{ il existe une partition } (\omega_i) \text{ de } \Omega \text{ telle que } v \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega}_i) \right\}$$

et

$$V_0 = \{v \in V,\, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

On munit V du produit scalaire

$$< u, v >_V = \int_\Omega (\nabla u(x)\,.\nabla v(x) \,+\, u(x)v(x))\, dx$$

et de la norme associée

$$\|u\|_V = \sqrt{< u, u >_V}.$$

On introduit les espaces d'approximation interne :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega});\ v_{h|_{K_j}} \in \mathbb{P}_1, \forall\, 0 \leq j \leq n;\ \} \subset V$$

et

$$V_{0h} = \{v_h \in V_h,\, v_h(0) = v_h(L) = 0\} \subset V_0$$

Exercice 1

Estimation d'erreur en norme L^2.
Soit le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in V_0 \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall\, v \in V_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

avec f une fonction donnée dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
On rappelle que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' = f \text{ dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

admet une solution unique dans $\mathcal{C}^2([0, 1])$.
On considère le problème variationnel approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in V_{0h} \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u_h'(x)\, v_h'(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v_h(x)\, dx \quad \forall\, v_h \in V_{0h}. \end{array} \right. \tag{3}$$

1. **Estimation d'erreur en norme L^2.** Montrer l'estimation d'erreur entre la solution u du problème (1) et la solution u_h du problème (3) :

$$\|u' - u_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq h \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En déduire l'estimation d'ordre 1 en norme L^2 :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

avec C_1 une constante ne dépendant que de Ω. Cette estimation n'est pas optimale.

2. **Problème variationnel pour la fonction erreur.** Soit le problème variationnel auxiliaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \zeta \in V_0 \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \zeta'(x)\, v'(x)\, dx = \int_\Omega (u - u_h)(x)\, v(x)\, dx \quad \forall\, v \in V_0, \end{array} \right. \tag{4}$$

où la donnée est l'erreur de convergence.
Montrer que

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (u - u_h)'(x)\, (\zeta - r_h \zeta)'(x)\, dx,$$

où r_h est un opérateur d'interpolation à préciser.

3. **Lemme d'Aubin-Nitsche.** En déduire l'estimation d'ordre 2 en norme L^2

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

avec C_2 une constante que l'on précisera.

Exercice 2

Quadratures.
Soit le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in V_0 \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall\, v \in V_0, \end{array} \right. \tag{5}$$

avec

$$a(u, v) = \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

où $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ est une fonction donnée. On considère l'espace d'approximation V_{0h} introduit ci-dessus et on souhaite utiliser une formule de quadrature pour approcher les intégrales dépendant de f intervenant au second membre. La formule de quadrature dite des trapèzes est définie sur chaque maille $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, pour tout $0 \leq j \leq n$, par, pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1(K_j)$

$$Q_j(\psi) := \frac{h}{2}(\psi(x_j) + \psi(x_{j+1})) \simeq \int_{K_j} \psi(x)\, dx.$$

On introduit alors la forme linéaire approchée L_h, telle que pour tout $v_h \in V_h$,

$$L_h(v_h) = \sum_{j=0}^{n} Q_j(fv_h) \simeq L(v_h).$$

Soit enfin le problème variationnel approché :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Chercher}\, u_h \in V_{0h} \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_{0h}, \end{array}\right. \tag{6}$$

La différence avec le problème d'approximation (3) se situe dans l'évaluation du membre de droite.

1. **Système linéaire.** Expliciter le système linéaire associé à (2). Commenter par rapport à l'approche différences finies centrées d'ordre 2.
2. **Lien avec l'opérateur d'interpolation.** Montrer que pour tout $v_h \in V_h$,

$$L_h(v_h) = \int_\Omega (r_h(fv_h))(x)\, dx$$

   où r_h est l'opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_1$.
3. **Premier lemme de Strang.** On désigne par ν et M les paramètres de coercivité et continuité de la forme bilinéaire a vis à vis de la norme $\|.\|_V$. Montrer que pour tout $w_h \in V_{0h}$,

$$\nu\|u_h - w_h\|_V \leq \sup_{v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}} \frac{a(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|_V},$$

   puis que

$$\nu\|u_h - w_h\|_V \leq M\|u - w_h\|_V + \sup_{v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}} \frac{L(v_h) - L_h(v_h)}{\|v_h\|_V}.$$

4. **Estimation uniforme.** En utilisant les propriétés de l'opérateur d'interpolation r_h, montrer que

$$\sup_{v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega (\, fv_h - r_h(fv_h)\,)(x)\, dx}{\|v_h\|_V} \leq Ch\|f\|_V.$$

   En déduire la convergence à l'ordre 1 en norme $\|.\|_V$ pour le problème variationnel approché (2).

Eléments de Correction

Exercice 1

Estimation d'erreur en norme L^2.

1. **Estimation d'erreur en norme L^2.** Il s'agit du théorème 3.2.6. Rappelons que la démonstration se fait en 2 temps. Premièrement, on utilise le lemme de Céa (lemme 3.1.12), reliant erreur de convergence à erreur d'interpolation

$$\nu \|u - u_h\| \leq M \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|$$

qui s'écrit comme $a(u, v)$ est exactement le produit scalaire L^2 des dérivées u' et v'

$$\|u' - u_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u' - v_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u' - (r_{0h}u)'\|_{L^2(\Omega)}$$

où l'on a introduit r_{0h} l'opérateur d'interpolation $\mathbb{P}1$ défini de V_0 dans V_{0h} par, pour tout $v \in V_0$,

$$r_{0h}v = \sum_{j=1}^{n} v(x_j)\varphi_j.$$

On rappelle que les fonctions $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n} \in V_{0h}$ définies par, pour tout $1 \leq j \leq n$, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$ (avec δ_{kj} symbole de Kronecker) forment une base de V_{0h} (lemme 3.2.1). La deuxième étape consiste à étudier l'erreur d'interpolation pour obtenir une estimation *a priori* en fonction des dérivées d'ordre supérieur de la solution u du problème (1) qui est dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. En utilisant le lemme 3.2.8, pour tout $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$,

$$\|v' - (r_{0h}v)'\|_{L^2(\Omega)} \leq h\|v''\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme u solution de (1) vérifie $-u'' = f$, on obtient en regroupant les deux résultats,

$$\|u' - u_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq h\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'estimation d'ordre 1 en norme L^2 s'obtient ensuite en écrivant que pour toute fonction $v \in V_0$ et pour tout $x \in]0, L[$

$$v(x) = \int_0^x v'(y)\, dy \leq \left(\int_0^L |v'(y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_0^L |1|^2 dy\right)^{1/2}$$

et donc

$$\int_0^L |v(x)|^2\, dx \leq L \left(\int_0^L |v'(y)|^2 dy\right) L$$

soit l'inégalité de Poincaré pour tout $v \in V_0$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

Par suite,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|u' - u_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq Lh\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

La constante L correspond au diamètre de Ω (ici $L = 1$).

2. **Problème variationnel pour la fonction erreur.**
Comme $u - u_h \in V_0$, on peut prendre $v_h = u - u_h$ dans (4),
$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (u - u_h)(x)\,(u - u_h)(x)\,dx = \int_\Omega \zeta'(x)\,(u - u_h)'(x)\,dx.$$
D'autre part, comme u est solution de (1) et u_h est solution de (3) pour la même donnée f, on a pour tout $w_h \in V_{0h}$,
$$\int_\Omega (u - u_h)'(x)\,w_h'(x)\,dx = 0.$$
En utilisant l'opérateur d'interpolation r_{0h} de V_0 dans V_{0h} défini plus haut, on a $r_{0h}\zeta \in V_{0h}$ et donc
$$\int_\Omega (u - u_h)'(x)\,(r_{0h}\zeta)'(x)\,dx = 0.$$
En regroupant les 2 résultats, on obtient
$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (u - u_h)'(x)\,(\zeta - r_{0h}\zeta)'(x)\,dx.$$

3. **Lemme d'Aubin-Nitsche.** Comme $u - u_h \in \mathcal{C}(\Omega) \cap V_0$, $\zeta \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap V_0$ avec $-\zeta'' = u - u_h$, et on peut appliquer à ζ le résultat d'interpolation de la question précédente, soit
$$\|(\zeta - r_{0h}\zeta)'\|_{L^2(\Omega)} \le h\|\zeta''\|_{L^2(\Omega)} = h\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$
Par suite et par Cauchy-Schwarz,
$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}\|(\zeta - r_{0h}\zeta)'\|_{L^2(\Omega)} \le \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} h\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$$
et donc
$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \le h\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \le h^2\|f\|_{L^2(\Omega)}$$
en utilisant l'estimation d'erreur obtenue sur $(u - u_h)'$ en norme L^2. Nous avons gagné un ordre de convergence sur l'erreur en norme L^2.

Exercice 2

Quadratures.
Soit le problème variationnel :
$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V_0 \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall\, v \in V_0, \end{cases} \tag{1}$$
avec
$$a(u, v) = \int_\Omega u'(x)\,v'(x)\,dx$$
et
$$L(v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx.$$
où $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ est une fonction donnée. On considère l'espace d'approximation $V_{0,h}$ introduit précédemment et on souhaite utiliser une formule de quadrature pour approcher les intégrales dépendant de f intervenant au second membre. La formule de quadrature

dite des trapèzes est définie sur sa chaque maille $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, pour tout $0 \leq j \leq J$, par, pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1(K_j)$

$$Q_j(\psi) := \frac{h}{2}(\psi(x_j) + \psi(x_{j+1}) \simeq \int_{K_j} \psi(x)\, dx.$$

On introduit alors la forme linéaire approchée L_h, telle que pour tout $v_h \in V_h$,

$$L_h(v_h) = \sum_{j=0}^{J} Q_j(f v_h) \simeq L(v_h).$$

Soit enfin le problème variationnel approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher}\, u_h \in V_{0h} \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_{0h}, \end{array} \right. \tag{2}$$

La différence avec le problème d'approximation (3) se situe dans l'évaluation du membre de droite.

1. **Système linéaire.** La matrice du système linéaire d'ordre n est la matrice de rigidité classique (cf formule 3.25) pour l'approximation du problème de Dirichlet par éléments finis $\mathbb{P}1$. Intéressons nous au nouveau second membre qui est le vecteur $B \in \mathbb{R}^n$ de terme général, pour tout $1 \leq i \leq n$,

   $$B_i = L_h(\varphi_i) = Q_{i-1}(f\varphi_i) + Q_i(f\varphi_i) = h\, f(x_i).$$

   Le système linéaire ainsi obtenu est exactement celui que l'on avait trouvé par la méthode des différences finies centrées d'ordre 2.

2. **Lien avec l'opérateur d'interpolation.** On vérifie facilement que la formule des trapèzes est exacte pour les polynômes de degré 1. Donc pour tout $v_h \in V_h$, pour tout $0 \leq j \leq n$,

   $$\int_{K_j} (r_h(f v_h))(x)\, dx = Q_j(r_h(f v_h))$$

   car $r_h(f v_h)$ est un polynôme de degré 1 sur chaque maille K_j. De plus les valeurs aux sommets de $r_h(f v_h)$ sont égales par définition de l'opérateur d'interpolation à celles de $f v_h$, donc

   $$Q_j(r_h(f v_h))) = Q_j(f v_h).$$

   On en déduit par sommation sur $0 \leq j \leq n$,

   $$L_h(v_h) = \sum_{j=0}^{n} Q_j(f v_h) = \int_{\Omega} (r_h(f v_h))(x)\, dx.$$

   Ce résultat s'étend bien entendu à V_{0h}.

3. **Premier lemme de Strang.** Soit $w_h \in V_{0h}$, en écartant le cas trivial $w_h = u_h$, on a en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a,

   $$\nu \|u_h - w_h\|_V \leq \frac{a(u_h - w_h, u_h - w_h)}{\|u_h - w_h\|_V} \leq \sup_{v_h \in V_{0h} \setminus \{0\}} \frac{a(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|_V},$$

Puis on introduit u dans l'estimation de $a(u_h - w_h, v_h)$ pour faire apparaître les formes linéaires provenant des problèmes variationnels dont u et u_h sont solutions.

$$a(u_h - w_h, v_h) = a(u_h - u, v_h) + a(u - w_h, v_h) = L_h(v_h) - L(v_h) + a(u - w_h, v_h)$$

Par suite, en utilisant la continuité de la forme bilinéaire a,

$$a(u_h - w_h, v_h) \leq M\|u - w_h\|_V \|v_h\|_V + L_h(v_h) - L(v_h)$$

ce qui nous permet d'obtenir l'estimation

$$\nu\|u_h - w_h\|_V \leq M\|u - w_h\|_V + \sup_{v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}} \frac{L(v_h) - L_h(v_h)}{\|v_h\|_V}.$$

4. **Estimation uniforme.** En utilisant la première question, on a pour tout $v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}$,

$$\frac{L(v_h) - L_h(v_h)}{\|v_h\|_V} = \frac{\displaystyle\int_\Omega (\, f v_h - \, r_h(f v_h)\,)(x)\, dx}{\|v_h\|_V}.$$

On pose $\psi = f v_h \in \mathcal{C}^1(K_j)$, on a pour tout $x \in K_j$, $0 \leq j \leq n$, (cf formule 3.31)

$$|\psi(x) - r_h\psi)(x)| = \left| \int_{x_j}^{x} \psi'(t)dt - \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi'(t)dt \right| \leq 2 \int_{K_j} |\psi'(t)|dt$$

et donc en intégrant sur K_j

$$\int_{K_j} |\psi(x) - r_h\psi)(x)|dx \leq 2h \int_{K_j} |\psi'(t)|dt$$

Comme $\psi' = f'v_h + f v_h'$, il vient par Cauchy-Schwarz,

$$\int_{K_j} |\psi'(t)|dt \leq \int_{K_j} (|f'(t)||v_h(t)| + |f(t)||v_h'(t)|)dt \leq \|f\|_{V(]x_j,x_{j+1}[)} \|v_h\|_{V(]x_j,x_{j+1}[)}.$$

En regroupant, en sommant sur les mailles, et en utilisant à nouveau une inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient pour tout $v_h \in V_{0h} \setminus \{0\}$,

$$\int_\Omega |\, f v_h - \, r_h(f v_h)\,|(x)\, dx \leq 2h\|f\|_V \|v_h\|_V,$$

soit

$$\sup_{v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}} \frac{L(v_h) - L_h(v_h)}{\|v_h\|_V} \leq 2h\|f\|_V.$$

On en déduit en utilisant la question précédente

$$\nu\|u_h - w_h\|_V \leq M\|u - w_h\|_V + 2h\|f\|_V.$$

Comme $\nu > 0$, on obtient l'estimation d'erreur établie pour tout $w_h \in V_{0h}$,

$$\begin{array}{rcl} \|u - u_h\|_V & = & \|u - w_h - (u_h - w_h)\|_V \\ & \leq & \left(1 + \dfrac{M}{\nu}\right) \|u - w_h\|_V + 2(\nu)^{-1}h\|f\|_V \end{array}$$

En prenant $w_h = r_h u$ et comme $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, par le lemme 3.2.8, on en déduit qu'il existe une constante indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch(\|u''\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_V)$$

et donc l'utilisation de la formule de quadrature des trapèzes pour l'évaluation du second membre est d'ordre 1 en norme $\|.\|_V$ et donc cohérente avec l'espace d'éléments finis choisi.