Analyse numérique et optimisation

TD n^{o}4 I. Terrasse - Groupes 6&13

Formulation variationnelle et éléments finis en dimension 1.

Exercice 1

Condition aux limites de type Robin.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, régulier de classe $\mathcal{C}^1$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, deux fonctions données et β un réel positif donné homogène à l'inverse d'une longueur. On considère le problème aux limites :

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Chercher} \quad u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) & & \text{tel que} \\ -\Delta\, u = f & & \text{dans } \Omega \\ \beta\, u + \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1}$$

1. **Ecriture sous forme variationnelle.** Etablir une formulation variationnelle du problème (1). En supposant que u est une fonction de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, établir l'équivalence entre les deux problèmes. Montrer qu'on peut généraliser la formulation variationnelle à

$$V = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \text{ il existe une partition } (\omega_i) \text{ de } \Omega \text{ telle que } v \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega}_i) \right\}$$

2. **Résultat d'unicité.** Montrer que si $\beta > 0$, le problème variationnel possède au plus une solution, et en déduire que le problème aux limites (1) vérifie ce même résultat d'unicité.
3. **Discrétisation par éléments finis.** On se place en 1 dimension d'espace, on considère sur $\Omega =]0,1[$ un maillage uniforme de pas $h = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, de sommets $x_j = jh$, $0 \le j \le n+1$ et de mailles $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, $0 \le j \le n$. Montrer que le problème variationnel approché se ramène à la résolution d'un système linéaire

$$K_h U_h = b_h$$

que l'on explicitera. Montrer que si $\beta > 0$, la matrice K_h est symétrique définie positive. En déduire existence et unicité du problème approché.
4. **Cas limite : $\beta = 0$.** Que se passe-t'il dans le cas continu si $\beta = 0$? On suppose désormais que Ω est connexe (ce qui revient à étudier chaque composante connexe de Ω indépendamment). On rajoute alors la condition :

$$\int_\Omega u(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

Montrer que si (1) + (2) admet une solution dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, nécessairement :

$$\int_\Omega f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\, d\sigma(x) = 0$$

Que se passe-t'il dans le cas discret ?

Dans les exercices suivants consacrés à la dimension 1, on se placera dans $\Omega =]0, L[$, sur lequel on considérera un maillage uniforme de pas $h = \dfrac{L}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, de sommets $x_j = jh$, $0 \leq j \leq n+1$ et de mailles $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n$.
On notera

$$V = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \text{ il existe une partition } (\omega_i) \text{ de } \Omega \text{ telle que } v \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega}_i) \right\}$$

et

$$V_0 = \{ v \in V,\, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

On munit V du produit scalaire

$$< u, v >_V = \int_\Omega \left(\nabla u(x) \,.\nabla v(x) \;+\; u(x) v(x) \right) dx$$

et de la norme associée

$$\|u\|_V = \sqrt{< u, u >_V}.$$

On introduit les espaces d'approximation interne :

$$V_h = \{ v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega});\; v_{h|_{K_j}} \in \mathbb{P}_1,\, \forall\, 0 \leq j \leq n; \} \subset V$$

et

$$V_{0h} = \{ v_h \in V_h,\, v_h(0) = v_h(L) = 0 \} \subset V_0$$

Exercice 2

Estimation d'erreur en norme L^2.
Soit le problème variationnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \;\in V_0 \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall\, v \in V_0, \end{array} \right. \tag{3}$$

avec f une fonction donnée dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
On rappelle que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' = f \text{ dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

admet une solution unique dans $\mathcal{C}^2([0, 1])$.
On considère le problème variationnel approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \;\in V_{0h} \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u_h'(x)\, v_h'(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v_h(x)\, dx \quad \forall\, v_h \in V_{0h}. \end{array} \right. \tag{5}$$

1. **Estimation d'erreur en norme L^2.** Montrer l'estimation d'erreur entre la solution u du problème (3) et la solution u_h du problème (5) :

$$\|u' - u_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq h \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En déduire l'estimation d'ordre 1 en norme L^2 :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

avec C_1 une constante ne dépendant que de Ω. Cette estimation n'est pas optimale.

2. **Problème variationnel pour la fonction erreur.** Soit le problème variationnel auxiliaire :
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \zeta \in V_0 \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \zeta'(x)\, v'(x)\, dx = \int_\Omega (u - u_h)(x)\, v(x)\, dx \quad \forall\, v \in V_0, \end{array} \right. \tag{6}$$
où la donnée est l'erreur de convergence.
Montrer que
$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (u - u_h)'(x)\, (\zeta - r_h \zeta)'(x)\, dx,$$
où r_h est un opérateur d'interpolation à préciser.
3. **Lemme d'Aubin-Nitsche.** En déduire l'estimation d'ordre 2 en norme L^2
$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)},$$
avec C_2 une constante que l'on précisera.

Exercice 3

Quadratures.
Soit le problème variationnel :
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in V_0 \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall\, v \in V_0, \end{array} \right. \tag{7}$$
avec
$$a(u, v) = \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, dx$$
et
$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$
où $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ est une fonction donnée. On considère l'espace d'approximation V_{0h} introduit ci-dessus et on souhaite utiliser une formule de quadrature pour approcher les intégrales dépendant de f intervenant au second membre. La formule de quadrature dite des trapèzes est définie sur chaque maille $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, pour tout $0 \leq j \leq n$, par, pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1(K_j)$
$$Q_j(\psi) := \frac{h}{2}(\psi(x_j) + \psi(x_{j+1})) \simeq \int_{K_j} \psi(x)\, dx.$$
On introduit alors la forme linéaire approchée L_h, telle que pour tout $v_h \in V_h$,
$$L_h(v_h) = \sum_{j=0}^{n} Q_j(f v_h) \simeq L(v_h).$$
Soit enfin le problème variationnel approché :
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in V_{0h} \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_{0h}, \end{array} \right. \tag{8}$$
La différence avec le problème d'approximation (5) se situe dans l'évaluation du membre de droite.

1. **Système linéaire.** Expliciter le système linéaire associé à (8). Commenter par rapport à l'approche différences finies centrées d'ordre 2.
2. **Lien avec l'opérateur d'interpolation.** Montrer que pour tout $v_h \in V_h$,
$$L_h(v_h) = \int_\Omega (r_h(f v_h))(x)\, dx$$
où r_h est l'opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_1$.
3. **Premier lemme de Strang.** On désigne par ν et M les paramètres de coercivité et continuité de la forme bilinéaire a vis à vis de la norme $\|.\|_V$. Montrer que pour tout $w_h \in V_{0h}$,
$$\nu \|u_h - w_h\|_V \leq \sup_{v_h \in V_{0h} \setminus \{0\}} \frac{a(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|_V},$$
puis que
$$\nu \|u_h - w_h\|_V \leq M \|u - w_h\|_V + \sup_{v_h \in V_{0h} \setminus \{0\}} \frac{L(v_h) - L_h(v_h)}{\|v_h\|_V}.$$
4. **Estimation uniforme.** En utilisant les propriétés de l'opérateur d'interpolation r_h, montrer que
$$\sup_{v_h \in V_{0h} \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\, f v_h - \, r_h(f v_h)\,)(x)\, dx}{\|v_h\|_V} \leq C h \|f\|_V.$$
En déduire la convergence à l'ordre 1 en norme $\|.\|_V$ pour le problème variationnel approché (8).

Eléments de Correction

Exercice 1

Condition aux limites de type Robin.

1. **Ecriture sous forme variationnelle.** La formulation variationnelle obtenue est :

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u \in \tilde{V} \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in \tilde{V}, \end{cases} \tag{9}$$

avec $\tilde{V} = \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \beta \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, ds$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\, v(x)\, ds.$$

En effet, soit u une solution de (1). On a $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) = \tilde{V}$. On multiplie ensuite l'équation posée dans le volume $-\Delta u = f$ par une fonction test $v \in \tilde{V}$ et on intègre sur Ω. En utilisant la formule de Green (Lemme 3.1.2), il vient :

$$\int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega -\Delta u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\, v(x)\, ds.$$

On injecte alors la condition de type Robin dans l'intégrale de bord, on a :

$$\int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \beta \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, ds - \int_{\partial\Omega} g(x)\, v(x)\, ds.$$

En regroupant les termes bilinéaires et linéaires, on obtient que pour tout $v \in \tilde{V}$, u vérifie $a(u,v) = L(v)$ avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \beta \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, ds$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\, v(x)\, ds.$$

et donc u solution de (1) est solution du problème variationnel (9) pour a et L définies ci dessus.

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ solution de (9). On intègre par parties "à l'envers" l'expression variationnelle qui devient, pour toute fonction $v \in \tilde{V}$:

$$\int_\Omega (\Delta u(x) + f(x))\, v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) - g(x) \right) v(x)\, ds.$$

On choisit d'abord les fonctions v à support compact dans Ω pour annuler l'intégrale sur $\partial\Omega$. Comme $\Delta u + f$ est une fonction continue, le lemme 3.1.7 nous permet de conclure que

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

On en déduit alors que pour toute fonction $v \in \tilde{V}$,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) - g(x) \right) v(x)\, ds = 0.$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) - g(x)$ est une fonction continue sur $\partial\Omega$, en appliquant de même le lemme 3.1.7 sur le bord $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

et donc u est solution de (1). On peut élargir en fait l'espace V des fonctions tests en considérant

$$V = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \text{ il existe une partition } (\omega_i) \text{ de } \Omega \text{ telle que } v \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega}_i) \right\}.$$

Comme $\tilde{V} \subset V$, toute solution u de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ du nouveau problème variationnel (9) est solution de (1). Il faut donc juste vérifier que la première implication reste vraie pour des fonctions de V. On intègre de même sur Ω en décomposant l'intégrale sur la partition ω_i et on applique la formule de Green par morceaux. Les seuls termes nouveaux qui apparaissent sont les termes de bord sur les interfaces entre les domaines de la partition (les frontières avec le bord de $\partial\Omega$ sont déjà prises en compte) :

$$\int_{\partial w_i} \frac{\partial u}{\partial n_i}(x) v(x)\, ds$$

Les fonctions ∇u et v étant continues à l'intérieur du domaine, ces termes se compensent de part et d'autre puisque la normale intervenant dans le terme de bord est extérieure à chaque domaine et donc sur $\int_{\partial\omega_i \cap \partial\omega_j}$

$$\vec{n}_i + \vec{n}_j = 0.$$

2. **Résultat d'unicité.** On suppose $\beta > 0$. On suppose que le problème variationnel (9) admet deux solutions u_1 et u_2. Posons $w = u_1 - u_2$ et utilisons les propriétés de linéarité : $w \in V$ et
$$a(w, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$
En particulier, on peut prendre $v = w$, il vient $a(w, w) = 0$ soit
$$\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2\, dx + \beta \int_{\partial\Omega} |w(x)|^2\, ds = 0$$
Donc, d'une part $\nabla w = 0$ donc w est une constante sur chaque composante connexe de Ω et d'autre part $w = 0$ sur le bord de Ω (car $\beta > 0$) ; d'où $w = 0$ partout et par suite on a unicité de la solution de (9) (si elle existe). Comme toute solution de (1) est solution du problème variationnel (9), on en déduit l'unicité des solutions de (1).

3. **Discrétisation par éléments finis.** On introduit l'espace d'approximation interne
$$V_h = \{ v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega});\ v_{h|_{K_j}} \in \mathbb{P}_1, \forall\, 0 \leq j \leq n;\ \} \subset V$$

D'après le lemme 3.2.1, V_h est de dimension finie égale à $n+2$ et les fonctions chapeaux $(\varphi_j)_{0\leq j\leq n+1}$ forment une base de V_h. On introduit le problème approché :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Chercher}\, u_h\; \in V_h \text{ tel que}\\ a(u_h,v_h)=L(v_h)\quad \forall\, v_h\in V_h,\end{array}\right. \tag{10}$$

On décompose u_h dans la base des φ_j : $u_h(x)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1}u_j\varphi_j(x)$ et on prend successivement pour fonction test v_h chacune des fonctions de base φ_i, $0\leq i\leq n+1$. En posant $U_h=(u_0,\cdots,u_{n+1})$ le vecteur dans $\mathbb{R}^{n+2}$ des coordonnées de u_h, le problème (10) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Chercher}\, U_h\; \in \mathbb{R}^{n+2} \text{ tel que}\\ a(\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1}u_j\varphi_j,\varphi_i)=L(\varphi_i)\quad 0\leq i\leq n+1,\end{array}\right. \tag{11}$$

ce qui s'écrit par linéarité

$$K_h\,U_h=b_h$$

avec la matrice $K_h\in\mathbb{R}^{n+2,n+2}$ et le vecteur $b_h\in\mathbb{R}^{n+2}$ de terme général pour $0\leq i,j\leq n+1$,

$$(K_h)_{ij}=a(\varphi_j,\varphi_i),\qquad (b_h)_i=L(\varphi_i).$$

On peut expliciter la matrice K_h :

$$K_h=\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1+\beta h & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & \vdots\\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1\\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 1+\beta h\end{pmatrix}.$$

et le vecteur b_h en utilisant la formule d'intégration des trapèzes

$$b_h=\begin{pmatrix} h/2f(x_0)+g(x_0)\\ hf(x_1)\\ \\ \vdots\\ hf(x_n)\\ h/2f(x_{n+1}+g(x_{n+1})\end{pmatrix}.$$

Par intégration par parties discrètes, on peut écrire

$$<K_hU_h,U_h>_{\mathbb{R}^{n+2}}=h\sum_{j=0}^{n}\frac{(u_{j+1}-u_j)^2}{h^2}+\beta u_0^2+\beta u_{n+1}^2.$$

La matrice K_h est donc symétrique positive et si $\beta>0$ elle est définie. Le problème approché (10) admet donc une solution unique dans $\mathbb{R}^{n+2}$.

4. **Cas limite : $\beta = 0$.** Si $\beta = 0$, la démonstration précédente montre que le vecteur de composantes toutes égales à 1 est dans le noyau de K_h, la matrice n'est donc pas inversible. En revenant au problème continu si u est solution de (1) et/ou (9), alors u + toute constante est aussi solution.

   On rajoute alors une condition sur u pour forcer l'unicité. On choisit, condition (2), de se placer dans le sous-espace des fonctions à moyenne nulle (on raisonne sur chaque composante connexe de Ω si Ω n'est pas connexe). Cela ne suffit pas à assurer l'existence d'une solution pour toutes données $(f, g) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\partial\Omega)$, en effet si u est solution de (1), alors en intégrant l'équation aux dérivées partielles sur Ω, il vient nécessairement en utilisant la formule de Green :

$$\int_\Omega f(x)dx = -\int_\Omega \Delta u(x)dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)ds = -\int_{\partial\Omega} g(x)ds$$

   et donc on obtient la condition nécessaire de compatibilité entre les données pour avoir existence :

$$\int_\Omega f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\, ds = 0.$$

   Dans le cas discret, on cherche aussi la solution à une constante près, on peut donc prendre par exemple $u_0 = 0$ et supprimer ainsi la première ligne et la première colonne. On montre alors par intégration par parties discrètes que la nouvelle matrice est inversible. Il faut cependant aussi une condition de compatibilité sur le second membre qui doit appartenir à l'image du système initial et donc être orthogonal au noyau ce qui s'écrit en remarquant que la somme des fonctions de base est exactement la fonction constante égale à 1

$$\int_0^1 f(x)\, dx + g(0) + g(1) = 0.$$

   qui est bien la condition de compatibilité du problème continu.

Exercice 2

Estimation d'erreur en norme L^2.

1. **Estimation d'erreur en norme L^2.** Il s'agit du théorème 3.2.6. Rappelons que la démonstration se fait en 2 temps. Premièrement, on utilise le lemme de Céa (lemme 3.1.12), reliant erreur de convergence à erreur d'interpolation

$$\nu\|u - u_h\| \leq M \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|$$

   qui s'écrit comme $a(u, v)$ est exactement le produit scalaire L^2 des dérivées faibles u' et v'

$$\|u' - u_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u' - v_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u' - (r_{0h}u)'\|_{L^2(\Omega)}$$

   où l'on a introduit r_{0h} l'opérateur d'interpolation $\mathbb{P}1$ défini de V_0 dans V_{0h} par, pour tout $v \in V_0$,

$$r_{0h}v = \sum_{j=1}^{n} v(x_j)\varphi_j.$$

   On rappelle que les fonctions $(\varphi_j)_{1\leq j\leq n} \in V_{0h}$ définies par, pour tout $1 \leq j \leq n$, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$ (avec δ_{kj} symbole de Kronecker) forment une base de

V_{0h} (lemme 3.2.1). La deuxième étape consiste à étudier l'erreur d'interpolation pour obtenir une estimation *a priori* en fonction des dérivées d'ordre supérieur de la solution u du problème (3) qui est dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. En utilisant le lemme 3.2.8, pour tout $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$,

$$\|v' - (r_{0h}v)'\|_{L^2(\Omega)} \leq h\|v''\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme u solution de (3) vérifie $-u'' = f$, on obtient en regroupant les deux résultats,

$$\|u' - u_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq h\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'estimation d'ordre 1 en norme L^2 s'obtient ensuite en écrivant que pour toute fonction $v \in V_0$ et pour tout $x \in]0, L[$

$$v(x) = \int_0^x v'(y)\,dy \leq \left(\int_0^L |v'(y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_0^L |1|^2 dy\right)^{1/2}$$

et donc

$$\int_0^L |v(x)|^2\,dx \leq L\left(\int_0^L |v'(y)|^2 dy\right) L$$

soit l'inégalité de Poincaré pour tout $v \in V_0$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

Par suite,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|u' - u_h'\|_{L^2(\Omega)} \leq Lh\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

La constante L correspond au diamètre de Ω (ici $L = 1$).

2. **Problème variationnel pour la fonction erreur.**
Comme $u - u_h \in V_0$, on peut prendre $v_h = u - u_h$ dans (6),

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (u - u_h)(x)\,(u - u_h)(x)\,dx = \int_\Omega \zeta'(x)\,(u - u_h)'(x)\,dx.$$

D'autre part, comme u est solution de (3) et u_h est solution de (5) pour la même donnée f, on a pour tout $w_h \in V_{0h}$,

$$\int_\Omega (u - u_h)'(x)\,w_h'(x)\,dx = 0.$$

En utilisant l'opérateur d'interpolation r_{0h} de V_0 dans V_{0h} défini plus haut, on a $r_{0h}\zeta \in V_{0h}$ et donc

$$\int_\Omega (u - u_h)'(x)\,(r_{0h}\zeta)'(x)\,dx = 0.$$

En regroupant les 2 résultats, on obtient

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (u - u_h)'(x)\,(\zeta - r_{0h}\zeta)'(x)\,dx.$$

3. **Lemme d'Aubin-Nitsche.** Comme $u - u_h \in \mathcal{C}(\Omega) \cap V_0$, $\zeta \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap V_0$ avec $-\zeta'' = u - u_h$, et on peut appliquer à ζ le résultat d'interpolation de la question précédente, soit
$$\|(\zeta - r_{0h}\zeta)'\|_{L^2(\Omega)} \leq h\|\zeta''\|_{L^2(\Omega)} = h\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$
Par suite et par Cauchy-Schwarz,
$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}\|(\zeta - r_{0h}\zeta)'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} h\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$$
et donc
$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq h\|(u - u_h)'|_{L^2(\Omega)} \leq h^2\|f\|_{L^2(\Omega)}$$
en utilisant l'estimation d'erreur obtenue sur $(u - u_h)'$ en norme L^2. Nous avons gagné un ordre de convergence sur l'erreur en norme L^2.

Exercice 3

Quadratures.

1. **Système linéaire.** La matrice du système linéaire d'ordre n est la matrice de rigidité classique (cf formule 3.25) pour l'approximation du problème de Dirichlet par éléments finis $\mathbb{P}1$. Intéressons nous au nouveau second membre qui est le vecteur $B \in \mathbb{R}^n$ de terme général, pour tout $1 \leq i \leq n$,
$$B_i = L_h(\varphi_i) = Q_{i-1}(f\varphi_i) + Q_i(f\varphi_i) = h\, f(x_i).$$
Le système linéaire ainsi obtenu est exactement celui que l'on avait trouvé par la méthode des différences finies centrées d'ordre 2.
2. **Lien avec l'opérateur d'interpolation.** On vérifie facilement que la formule des trapèzes est exacte pour les polynômes de degré 1. Donc pour tout $v_h \in V_h$, pour tout $0 \leq j \leq n$,
$$\int_{K_j} (r_h(fv_h))(x)\, dx = Q_j(r_h(fv_h))$$
car $r_h(fv_h)$ est un polynôme de degré 1 sur chaque maille K_j. De plus les valeurs aux sommets de $r_h(fv_h)$ sont égales par définition de l'opérateur d'interpolation à celles de fv_h, donc
$$Q_j(r_h(fv_h))) = Q_j(fv_h).$$
On en déduit par sommation sur $0 \leq j \leq n$,
$$L_h(v_h) = \sum_{j=0}^{n} Q_j(fv_h) = \int_\Omega (r_h(fv_h))(x)\, dx.$$
Ce résultat s'étend bien entendu à V_{0h}.
3. **Premier lemme de Strang.** Soit $w_h \in V_{0h}$, en écartant le cas trivial $w_h = u_h$, on a en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a,
$$\nu\|u_h - w_h\|_V \leq \frac{a(u_h - w_h, u_h - w_h)}{\|u_h - w_h\|_V} \leq \sup_{v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}} \frac{a(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|_V},$$

Puis on introduit u dans l'estimation de $a(u_h - w_h, v_h)$ pour faire apparaître les formes linéaires provenant des problèmes variationnels dont u et u_h sont solutions.

$$a(u_h - w_h, v_h) = a(u_h - u, v_h) + a(u - w_h, v_h) = L_h(v_h) - L(v_h) + a(u - w_h, v_h)$$

Par suite, en utilisant la continuité de la forme bilinéaire a,

$$a(u_h - w_h, v_h) \leq M\|u - w_h\|_V \|v_h\|_V + L_h(v_h) - L(v_h)$$

ce qui nous permet d'obtenir l'estimation

$$\nu\|u_h - w_h\|_V \leq M\|u - w_h\|_V + \sup_{v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}} \frac{L(v_h) - L_h(v_h)}{\|v_h\|_V}.$$

4. **Estimation uniforme.** En utilisant la première question, on a pour tout $v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}$,

$$\frac{L(v_h) - L_h(v_h)}{\|v_h\|_V} = \frac{\displaystyle\int_\Omega (\, f v_h - \, r_h(f v_h)\,)(x)\, dx}{\|v_h\|_V}.$$

On pose $\psi = f v_h \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, comme nous sommes en dimension 1, on a pour tout $x \in K_j$, $0 \leq j \leq n$, (cf formule 3.31)

$$|\psi(x) - r_h\psi)(x)| = \left| \int_{x_j}^{x} \psi'(t)dt - \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi'(t)dt \right| \leq 2 \int_{K_j} |\psi'(t)|dt$$

et donc en intégrant sur K_j

$$\int_{K_j} |\psi(x) - r_h\psi)(x)|dx \leq 2h \int_{K_j} |\psi'(t)|dt$$

Comme $\psi' = f' v_h + f v_h'$, il vient par Cauchy-Schwarz,

$$\int_{K_j} |\psi'(t)|dt \leq \int_{K_j} (|f'(t)||v_h(t)| + |f(t)||v_h'(t)|)dt \leq \|f\|_{H^1(]x_j,x_{j+1}[)} \|v_h\|_{H^1(]x_j,x_{j+1}[)}.$$

En regroupant, en sommant sur les mailles, et en utilisant à nouveau une inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient pour tout $v_h \in V_{0h} \setminus \{0\}$,

$$\int_\Omega |\, f v_h - \, r_h(f v_h)\,|(x)\, dx \leq 2h\|f\|_V \|v_h\|_V,$$

soit

$$\sup_{v_h \in V_{0h}\setminus\{0\}} \frac{L(v_h) - L_h(v_h)}{\|v_h\|_V} \leq 2h\|f\|_V.$$

On en déduit en utilisant la question précédente

$$\nu\|u_h - w_h\|_V \leq M\|u - w_h\|_{H^1(\Omega)} + 2h\|f\|_V.$$

Comme $\nu > 0$, on obtient l'estimation d'erreur établie pour tout $w_h \in V_{0h}$,

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_V &= \|u - w_h - (u_h - w_h)\|_V \\ &\leq \left(1 + \frac{M}{\nu}\right) \|u - w_h\|_V + 2(\nu)^{-1} h\|f\|_V\end{aligned}$$

En prenant $w_h = r_h u$ et comme $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, par le lemme 3.2.8, on en déduit qu'il existe une constante indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch(\|u''\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_V)$$

et donc l'utilisation de la formule de quadrature des trapèzes pour l'évaluation du second membre est d'ordre 1 en norme $\|.\|_V$ et donc cohérente avec l'espace d'éléments finis choisi.