

Analyse numérique et optimisation

TD n°4 I. Terrasse

Formulation variationnelle et éléments finis en dimension 1.

Exercice 1

Condition aux limites de type Robin.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, régulier de classe $\mathcal{C}^1$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, deux fonctions données et β un réel positif donné homogène à l'inverse d'une longueur. On considère le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Chercher } u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) & \text{tel que} \\ -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \beta u + \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

1. **Ecriture sous forme variationnelle.** Etablir une formulation variationnelle du problème (1). En supposant que u est une fonction de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, établir l'équivalence entre les deux problèmes. Montrer qu'on peut généraliser la formulation variationnelle à

$$V = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \text{ il existe une partition } (\omega_i) \text{ de } \Omega \text{ telle que } v \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega_i}) \right\}$$

2. **Résultat d'unicité.** Montrer que si $\beta > 0$, le problème variationnel possède au plus une solution, et en déduire que le problème aux limites (1) vérifie ce même résultat d'unicité.
3. **Discrétisation par éléments finis.** On se place en 1 dimension d'espace, on considère sur $\Omega =]0, 1[$ un maillage uniforme de pas $h = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, de sommets $x_j = jh$, $0 \leq j \leq n+1$ et de mailles $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n$. Montrer que le problème variationnel approché se ramène à la résolution d'un système linéaire

$$K_h U_h = b_h$$

que l'on explicitera. Montrer que si $\beta > 0$, la matrice K_h est symétrique définie positive. En déduire existence et unicité du problème approché.

4. **Cas limite : $\beta = 0$.** Que se passe-t-il dans le cas continu si $\beta = 0$? On suppose désormais que Ω est connexe (ce qui revient à étudier chaque composante connexe de Ω indépendamment). On rajoute alors la condition :

$$\int_{\Omega} u(x) dx = 0. \quad (2)$$

Montrer que si (1) + (2) admet une solution dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, nécessairement :

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma(x) = 0$$

Que se passe-t-il dans le cas discret ?

Exercice 2

Conditions de transmission

On considère l'équation de la chaleur sur un intervalle $I =]a, b[$ de conductivité $k(x)$ donnée par

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in I_1 =]a, c[, \\ k_2 & \text{si } x \in I_2 =]c, b[\end{cases}$$

pour $a < c < b$. La température à l'équilibre

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{si } x \in I_1, \\ u_2(x) & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

est solution de l'équation

$$\begin{cases} -k_1 \Delta u_1 = f \text{ sur } I_1, \\ -k_2 \Delta u_2 = f \text{ sur } I_2, \\ u_1(a) = u_2(b) = 0 \\ u_1(c) = u_2(c) \text{ et } k_1 u_1'(c) = k_2 u_2'(c). \end{cases} \quad (3)$$

1. Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace

$$X = \{u \in \mathcal{C}^0(\bar{I}) : u|_{I_1} \in \mathcal{C}^1(I_1), u|_{I_2} \in \mathcal{C}^1(I_2) \text{ et } u(a) = u(b) = 0\}.$$

2. Montrer qu'une fonction

$$u \in \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{I}) : v|_{I_1} \in \mathcal{C}^2(\bar{I}_1), v|_{I_2} \in \mathcal{C}^2(\bar{I}_2) \text{ et } v(a) = v(b) = 0\}$$

est solution de (3) si et seulement si elle est solution de (V).

Exercice 3

Formulation Variationnelle symétrique et minimisation

Soit X un espace vectoriel normé, $a(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique continue et positive sur $X \times X$, et ℓ une forme linéaire continue sur X . Montrer que la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$$

admet un minimum u sur X si et seulement si

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in X.$$

Eléments de Correction

Exercice 1

Condition aux limites de type Robin.

1. **Ecriture sous forme variationnelle.** La formulation variationnelle obtenue est :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in \tilde{V} \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \tilde{V}, \end{cases} \quad (4)$$

avec $\tilde{V} = \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \beta \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) ds$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) ds.$$

En effet, soit u une solution de (1). On a $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) = \tilde{V}$. On multiplie ensuite l'équation posée dans le volume $-\Delta u = f$ par une fonction test $v \in \tilde{V}$ et on intègre sur Ω . En utilisant la formule de Green (Lemme 3.1.2), il vient :

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = \int_{\Omega} -\Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds.$$

On injecte alors la condition de type Robin dans l'intégrale de bord, on a :

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \beta \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) ds - \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) ds.$$

En regroupant les termes bilinéaires et linéaires, on obtient que pour tout $v \in \tilde{V}$, u vérifie $a(u, v) = L(v)$ avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \beta \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) ds$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) ds.$$

et donc u solution de (1) est solution du problème variationnel (4) pour a et L définies ci dessus.

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ solution de (4). On intègre par parties "à l'envers" l'expression variationnelle qui devient, pour toute fonction $v \in \tilde{V}$:

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x) + f(x)) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) - g(x) \right) v(x) ds.$$

On choisit d'abord les fonctions v à support compact dans Ω pour annuler l'intégrale sur $\partial\Omega$. Comme $\Delta u + f$ est une fonction continue, le lemme 3.1.7 nous permet de conclure que

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

On en déduit alors que pour toute fonction $v \in \tilde{V}$,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) - g(x) \right) v(x) ds = 0.$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) - g(x)$ est une fonction continue sur $\partial\Omega$, en appliquant de même le lemme 3.1.7 sur le bord $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

et donc u est solution de (1). On peut élargir en fait l'espace V des fonctions tests en considérant

$$V = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \text{ il existe une partition } (\omega_i) \text{ de } \Omega \text{ telle que } v \in \mathcal{C}^1(\overline{\omega_i}) \right\}.$$

Comme $\tilde{V} \subset V$, toute solution u de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ du nouveau problème variationnel (4) est solution de (1). Il faut donc juste vérifier que la première implication reste vraie pour des fonctions de V . On intègre de même sur Ω en décomposant l'intégrale sur la partition ω_i et on applique la formule de Green par morceaux. Les seuls termes nouveaux qui apparaissent sont les termes de bord sur les interfaces entre les domaines de la partition (les frontières avec le bord de $\partial\Omega$ sont déjà prises en compte) :

$$\int_{\partial\omega_i} \frac{\partial u}{\partial n_i}(x) v(x) ds$$

Les fonctions ∇u et v étant continues à l'intérieur du domaine, ces termes se compensent de part et d'autre puisque la normale intervenant dans le terme de bord est extérieure à chaque domaine et donc sur $\int_{\partial\omega_i \cap \partial\omega_j}$

$$\vec{n}_i + \vec{n}_j = 0.$$

2. **Résultat d'unicité.** On suppose $\beta > 0$. On suppose que le problème variationnel (4) admet deux solutions u_1 et u_2 . Posons $w = u_1 - u_2$ et utilisons les propriétés de linéarité : $w \in V$ et

$$a(w, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

En particulier, on peut prendre $v = w$, il vient $a(w, w) = 0$ soit

$$\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx + \beta \int_{\partial\Omega} |w(x)|^2 ds = 0$$

Donc, d'une part $\nabla w = 0$ donc w est une constante sur chaque composante connexe de Ω et d'autre part $w = 0$ sur le bord de Ω (car $\beta > 0$) ; d'où $w = 0$ partout et par suite on a unicité de la solution de (4) (si elle existe). Comme toute solution de (1) est solution du problème variationnel (4), on en déduit l'unicité des solutions de (1).

3. **Discrétisation par éléments finis.** On introduit l'espace d'approximation interne

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}); v_h|_{K_j} \in \mathbb{P}_1, \forall 0 \leq j \leq n; \} \subset V$$

D'après le lemme 3.2.1, V_h est de dimension finie égale à $n+2$ et les fonctions chapeaux $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ forment une base de V_h . On introduit le problème approché :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (5)$$

On décompose u_h dans la base des φ_j : $u_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} u_j \varphi_j(x)$ et on prend successivement pour fonction test v_h chacune des fonctions de base φ_i , $0 \leq i \leq n+1$. En posant $U_h = (u_0, \dots, u_{n+1})$ le vecteur dans $\mathbb{R}^{n+2}$ des coordonnées de u_h , le problème (5) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Chercher } U_h \in \mathbb{R}^{n+2} \text{ tel que} \\ a(\sum_{j=0}^{n+1} u_j \varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad 0 \leq i \leq n+1, \end{cases} \quad (6)$$

ce qui s'écrit par linéarité

$$K_h U_h = b_h$$

avec la matrice $K_h \in \mathbb{R}^{n+2, n+2}$ et le vecteur $b_h \in \mathbb{R}^{n+2}$ de terme général pour $0 \leq i, j \leq n+1$,

$$(K_h)_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad (b_h)_i = L(\varphi_i).$$

On peut expliciter la matrice K_h :

$$K_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 + \beta h & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 1 + \beta h \end{pmatrix}.$$

et le vecteur b_h en utilisant la formule d'intégration des trapèzes

$$b_h = \begin{pmatrix} h/2 f(x_0) + g(x_0) \\ hf(x_1) \\ \vdots \\ hf(x_n) \\ h/2 f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Par intégration par parties discrètes, on peut écrire

$$\langle K_h U_h, U_h \rangle_{\mathbb{R}^{n+2}} = h \sum_{j=0}^n \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{h^2} + \beta u_0^2 + \beta u_{n+1}^2.$$

La matrice K_h est donc symétrique positive et si $\beta > 0$ elle est définie. Le problème approché (5) admet donc une solution unique dans $\mathbb{R}^{n+2}$.

4. **Cas limite : $\beta = 0$.** Si $\beta = 0$, la démonstration précédente montre que le vecteur de composantes toutes égales à 1 est dans le noyau de K_h , la matrice n'est donc pas inversible. En revenant au problème continu si u est solution de (1) et/ou (4), alors $u +$ toute constante est aussi solution.

On rajoute alors une condition sur u pour forcer l'unicité. On choisit, condition (2), de se placer dans le sous-espace des fonctions à moyenne nulle (on raisonne sur chaque composante connexe de Ω si Ω n'est pas connexe). Cela ne suffit pas à assurer l'existence d'une solution pour toutes données $(f, g) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\partial\Omega)$, en effet si u est solution de (1), alors en intégrant l'équation aux dérivées partielles sur Ω , il vient nécessairement en utilisant la formule de Green :

$$\int_{\Omega} f(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) ds = - \int_{\partial\Omega} g(x) ds$$

et donc on obtient la condition nécessaire de compatibilité entre les données pour avoir existence :

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) ds = 0.$$

Dans le cas discret, on cherche aussi la solution à une constante près, on peut donc prendre par exemple $u_0 = 0$ et supprimer ainsi la première ligne et la première colonne. On montre alors par intégration par parties discrètes que la nouvelle matrice est inversible. Il faut cependant aussi une condition de compatibilité sur le second membre qui doit appartenir à l'image du système initial et donc être orthogonal au noyau ce qui s'écrit en remarquant que la somme des fonctions de base est exactement la fonction constante égale à 1

$$\int_0^1 f(x) dx + g(0) + g(1) = 0.$$

qui est bien la condition de compatibilité du problème continu.

Exercice 2

Conditions de transmission

1. On considère une fonction test

$$v \in X = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{I}) : v_1 := v|_{I_1} \in \mathcal{C}^1(I_1), v_2 := v|_{I_2} \in \mathcal{C}^1(I_2) \text{ et } v(a) = v(b) = 0\}$$

et en supposant u vérifiant (3) suffisamment régulière, en multipliant par v les 2 équations différentielles et en intégrant, on a :

$$- \int_a^c k_1 u_1''(x) v_1(x) dx - \int_c^b k_2 u_2''(x) v_2(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx.$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} & \int_a^c k_1 u_1'(x) v_1'(x) dx - k_1 [u_1'(c) v_1(c) - u_1'(a) v_1(a)] \\ & + \int_c^b k_2 u_2'(x) v_2'(x) dx - k_2 [u_2'(b) v_2(b) - u_2'(c) v_2(c)] = \int_a^b f(x) v(x) dx \end{aligned}$$

qui se réécrit en utilisant la continuité de v en c :

$$\begin{aligned} \int_a^b k(x)u'(x)v'(x) dx - [k_1u'_1(c) - k_2u'_2(c)]v(c) \\ + k_1u'_1(a)v_1(a) - k_2u'_2(b)v_2(b) \end{aligned} = \int_a^b f(x)v(x) dx.$$

où l'on a noté pour u et v :

$$w'(x) = \begin{cases} w'_1(x) & \text{si } x \in I_1, \\ w'_2(x) & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

Les termes de bord s'annulent, d'une part en utilisant la condition de transmission sur la dérivée première de u , d'autre part la nullité de la fonction test v en a et b . La condition de transmission sur u et les conditions aux limites en a et b donnent $u \in X$. La formulation variationnelle est donc :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in X \text{ tel que} \\ \int_a^b k(x)u'(x)v'(x) dx = a(u, v) = L(v) = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \forall v \in X, \end{cases}$$

2. Soit

$$u \in \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{I}) : v|_{I_1} \in \mathcal{C}^2(\bar{I}_1), v|_{I_2} \in \mathcal{C}^2(\bar{I}_2) \text{ et } v(a) = v(b) = 0\}$$

solution de (3), nous vérifions que u a la régularité suffisante pour justifier les opérations précédentes, en particulier $u \in X$. Donc u est solution de (V).

Réciproquement, on considère

$$u \in \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{I}) : v|_{I_1} \in \mathcal{C}^2(\bar{I}_1), v|_{I_2} \in \mathcal{C}^2(\bar{I}_2) \text{ et } v(a) = v(b) = 0\} \subset X$$

solution de (V). Comme u est $\mathcal{C}^2$ sur chacun des intervalles, on peut réintégrer par parties (à l'envers). Soit, pour tout $v \in X$,

$$\begin{aligned} - \int_a^c k_1u''_1(x)v'_1(x) dx + k_1[u'_1(c)v_1(c) - u'_1(a)v_1(a)] \\ - \int_c^b k_2u''_2(x)v'_2(x) dx + k_2[u'_2(b)v_2(b) - u'_2(c)v_2(c)] = \int_a^b f(x)v(x) dx \end{aligned}$$

soit en utilisant la nullité de v au bord de $\bar{I}$

$$\begin{aligned} - \int_a^c k_1u''_1(x)v'_1(x) dx + k_1u'_1(c)v_1(c) \\ - \int_c^b k_2u''_2(x)v'_2(x) dx - k_2u'_2(c)v_2(c) = \int_a^b f(x)v(x) dx \end{aligned}$$

- On commence par choisir le sous espace de X tel que v_2 est identiquement nulle et v_1 à support compact sur I_1 , (c'est bien un sous espace de X (continuité en c et nullité en a et b), on peut donc appliquer le lemme 3.1.7 :

$$-k_1u''_1(x) = f(x) \quad a < x < c$$

De même, en choisissant le sous espace de X tel que v_1 est indetiquement nulle et v_2 à support compact sur I_2 , on obtient toujours avec le lemme 3.1.7

$$-k_2u''_2(x) = f(x) \quad c < x < b$$

- Une fois obtenues, les équations différentielles, on se préoccupe alors des conditions aux limites. Les résultats précédents donnent pour tout $v \in X$:

$$k_1 u_1'(c) v_1(c) - k_2 u_2'(c) v_2(c) = 0$$

La continuité de v en c est essentielle pour obtenir

$$[k_1 u_1'(c) - k_2 u_2'(c)] v(c) = 0 \quad \forall v \in X$$

En construisant $v \in X$ tel que $v(c) = 1$ (prendre des fonctions linéaires par morceaux par exemple), on obtient la condition de transmission

$$k_1 u_1'(c) - k_2 u_2'(c) = 0$$

- Nous avons exploité tous les termes de bord de la formulation variationnelle, on utilise à présent que $u \in X$ pour obtenir les autres conditions

$$u(a) = u(b) = 0$$

et

$$u_1(c) = u_2(c)$$

par continuité de u sur $\bar{I}$.

Et donc u est bien solution de (3).

Exercice 3

Formulation Variationnelle symétrique et minimisation

Par linéarité, on développe la fonctionnelle quadratique : $\forall \delta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in X$,

$$\begin{aligned} J(u + \delta v) &= \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u) \\ &+ \delta \left[\frac{1}{2} (a(u, v) + a(v, u)) - \ell(v) \right] \\ &+ \delta^2 \frac{1}{2} a(v, v) \end{aligned}$$

Deux arguments sont essentiels, X est un espace vectoriel et a est symétrique pour écrire de manière équivalente $\forall \delta \in \mathbb{R}^*, \forall u, w \in X$,

$$\begin{aligned} J(w) &= J(u) \\ &+ \delta [a(u, v) - \ell(v)] \\ &+ \delta^2 \frac{1}{2} a(v, v) \end{aligned}$$

en posant $v = (w - u)/\delta \in X$.

- On suppose que $u \in X$ vérifie :

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in X.$$

Alors en prenant par exemple $\delta = 1, \forall w \in X$, en utilisant la positivité de a ,

$$J(w) = J(u) + \delta^2 \frac{1}{2} a(v, v) \geq J(u)$$

et u est un minimum de J sur X .

- On suppose que J admet un minimum $u \in X$ sur X . Alors $\forall \delta \in \mathbb{R}, \forall v \in X$,

$$\delta [a(u, v) - \ell(v)] + \delta^2 \frac{1}{2} a(v, v) \geq 0$$

soit en fixant v quelconque dans X ,

$$\delta \left[a(u, v) - \ell(v) + \delta \frac{1}{2} a(v, v) \right] \geq 0 \quad \forall \delta \in \mathbb{R}$$

que l'on réécrit

$$q(\delta) = \delta(A + \delta B) \geq 0 \quad \forall \delta \in \mathbb{R}$$

avec par positivité de a , $B \geq 0$. Soit $B = 0$ et cela implique que q est linéaire et donc sa positivité sur toute la droite implique $A = 0$. Soit $B > 0$, et q admet alors un minimum en $-A/(2B)$ avec

$$q(-A/(2B)) = -A^2/(4B) \leq 0$$

La positivité de q sur toute la droite entraine nécessairement que $A = 0$. Dans les 2 cas, on obtient, $\forall v \in X$,

$$a(u, v) - \ell(v) = 0$$