Analyse numérique et optimisation

TD n^{o}3 I. Terrasse

Différences Finies en temps et en espace : équation d'advection

Exercice 1

Equation d'advection : étude théorique

Soient T un réel strictement positif, $V > 0$ une vitesse d'advection (unité : m/s) et $u^0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction donnée 1-périodique. On s'intéresse à l'équation d'advection :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Chercher} \quad u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R} \text{ 1-périodique telle que} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + V\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,T[, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{1}$$

La solution exacte s'écrit $u(x,t) = u^0(x - Vt)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$.

1. **Résultats de conservation : cas continu.** Sans utiliser la forme explicite de la solution exacte, établir pour tout $t \in]0,T[$ les résultats de conservation de la masse et de l'énergie :

$$\int_0^1 u(x,t)\, dx = \int_0^1 u^0(x)\, dx, \qquad \int_0^1 |u(x,t)|^2\, dx = \int_0^1 |u^0(x)|^2\, dx.$$

Commenter par rapport à l'équation de la chaleur.

Dans la suite, nous allons étudier différents schémas aux différences finies en espace et en temps pour l'équation d'advection (1). On considère un entier $N > 0$ et le pas de temps $\Delta t = \dfrac{T}{N}$. On introduit pour tout $0 \le n \le N$, $t^n = n\Delta t$ l'instant discret. On considère par ailleurs un entier $J > 0$ et le pas d'espace $\Delta x = \dfrac{1}{J}$. On introduit les points discrets $x_j = j\,\Delta x$ pour tout $-1 \le j \le J+1$ et on étendra cette notation à $j \in \mathbb{Q}$. Pour tout $0 \le n \le N$, on introduit le vecteur $U^n = (U_i^n)_{1 \le i \le J} \in \mathbb{R}^J$ avec l'objectif que $U_i^n \simeq u(x_i, t^n) = \bar{U}_i^n$. On ajoute les conditions de 1-périodicité :

$$\forall\, 0 \le n \le N-1, \quad U_0^n = U_J^n \quad \text{et} \quad U_{J+1}^n = U_1^n$$

et pour tous les schémas à étudier, la condition initiale de démarrage en $n = 0$

$$\forall\, 1 \le j \le J, \quad U_j^0 = u^0(x_j).$$

Enfin, on introduit le nombre adimensionnel (appelé nombre de Courant advectif)

$$Co_a = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$$

2. **Schéma centré explicite.** On considère le schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{2}$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$.

(a) **Consistance.** Montrer que pour $u^0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ le schéma (2) est d'ordre un en temps et deux en espace.

(b) **Non stabilité** L^2 Montrer que le schéma (2) est inconditionnellement instable en norme L^2 dès que l'on a éliminé les cas triviaux $J = 1$ et $J = 2$.

3. **Schéma décentré amont.** On considère le schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{3}$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$.

(a) **Consistance.** Montrer que pour $u^0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ le schéma (3) est d'ordre un en temps et un en espace.

(b) **Stabilité** L^∞**.** Montrer que le schéma (3) est stable en norme L^∞ sous la condition CFL

$$Co_a \leq 1.$$

(c) **Convergence** L^∞. En déduire un résultat de convergence en norme L^∞ du schéma décentré amont (3).

(d) **Convergence** L^2**.** Qu'en est-il en norme L^2 ?

(e) **Diffusion numérique**. Montrer que le schéma décentré amont peut s'écrire comme une modification du schéma centré explicite par ajout d'un terme de diffusion numérique qu'on explicitera.

(f) **Résultats de conservation : cas discret.** En considérant pour $0 \leq n \leq N$, $\tilde{u}^n(x)$ la fonction 1-périodique constante par morceaux associée à U^n, établir un résultat de conservation de la masse discrète $\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx$ et de décroissance de l'énergie discrète $\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx$. Comparer avec le cas continu (question 1).

4. **Schéma de Lax-Wendroff.** On considère le schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V^2 \Delta t}{2}\right) \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \tag{4}$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$.

(a) **Consistance.** Montrer que pour $u^0 \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ le schéma (4) est d'ordre deux en temps et deux en espace.

(b) **Stabilité** L^2. Montrer que le schéma (4) est stable en norme L^2 sous la condition CFL

$$Co_a \leq 1.$$

(c) **Convergence** L^2. En déduire un résultat de convergence en norme L^2 du schéma de Lax-Wendroff (4).

(d) **Stabilité L^∞ ?** On s'intéresse à une donnée initiale $V^{(k)} \in \mathbb{R}^J$ telle que si $k \in \{1, \cdots, J-1\}$ est un indice fixé, $V_j^{(k)} = 1$ si $1 \leq j \leq k$, $V_j^{(k)} = 0$ sinon, pour tout $1 \leq j \leq J$. Conclure sur la stabilité L^∞ du schéma de Lax-Wendroff (4).

(e) **Résultats de conservation : cas discret.** En considérant pour $0 \leq n \leq N$, $\tilde{u}^n(x)$ la fonction 1-périodique constante par morceaux associée à U^n, préciser et commenter le comportement de $\displaystyle\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx$ et de $\displaystyle\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx$.

Exercice 2

Equation d'advection : implémentation numérique.

On s'intéresse à résoudre numériquement l'équation d'advection avec conditions de périodicité au bord :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + V\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in [a,b]\times]0,T], \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(a,t) = u(b,t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{5}$$

On prendra $a = 0$, $b = 1$ et $V = 1$.

1. **Montrer que la solution exacte** s'écrit $u(x,t) = u^0(x - Vt)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$.

   La durée totale de simulation T sera alors d'ordre de grandeur de quelques unités.

   Dans la suite, nous allons étudier différents schémas aux différences finies en espace et en temps pour l'équation d'advection (5). On considère un entier $N > 0$ et le pas de temps $\Delta t = \dfrac{T}{N}$. On introduit pour tout $0 \leq n \leq N$, $t^n = n\Delta t$ l'instant discret. On considère par ailleurs un entier $J > 0$ et le pas d'espace $\Delta x = \dfrac{1}{J}$. On introduit les points discrets $x_j = j\,\Delta x$ pour tout $-1 \leq j \leq J+1$. Pour tout $0 \leq n \leq N$, on introduit le vecteur $U^n = (U_i^n)_{1 \leq i \leq J} \in \mathbb{R}^J$ avec l'objectif que $U_i^n \simeq u(x_i, t^n) = \bar{U}_i^n$. On ajoute les conditions de 1-périodicité :

   $$\forall\, 0 \leq n \leq N-1, \quad U_0^n = U_J^n \quad \text{et} \quad U_{J+1}^n = U_1^n$$

   et pour tous les schémas à étudier, la condition initiale de démarrage en $n = 0$

   $$\forall\, 1 \leq j \leq J, \quad U_j^0 = u^0(x_j).$$

   Enfin, on introduit le nombre adimensionnel (appelé nombre de Courant advectif)

   $$Co_a = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$$

   On considérera comme donnée initiale $u^0(x)$ d'une part une fonction régulière

   $$u^0(x) = \sin(2\pi x)$$

   et plus généralement le L-ème mode de Fourier

   $$u^0(x) = \sin(2\pi L x)$$

et d'autre part une donnée irrégulière 1-périodique définie sur $]0,1[$ par

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0.25 < x < 0.75 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. **Implémentation et étude de la stabilité des schémas suivants**
   - **Schéma centré explicite.** On considère le schéma :

     $$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{6}$$

     pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$.
   - **Schéma décentré aval.** On considère le schéma :

     $$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0 \tag{7}$$

     pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$.
   - **Schéma décentré amont.** On considère le schéma :

     $$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{8}$$

     pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$.
   - **Schéma de Lax-Wendroff.** On considère le schéma :

     $$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V^2 \Delta t}{2}\right) \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \tag{9}$$

     pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$.
3. **Etude de la convergence des schémas décentré amont et de Lax-Wendroff.** On se placera à nombre de Courant fixé et on tracera en échelle log l'erreur en norme L^2 pour différentes valeurs de J entre la solution exacte et la solution approchée.

Eléments de Correction

Exercice 1

Equation d'advection

1. **Résultats de conservation : cas continu.** Soit $t \in]0,T[$, pour tout $s \in [0,t]$, on intègre en espace sur $[0,1]$ l'équation (1) :

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,s) + V \frac{\partial u}{\partial x}(x,s) \right) dx = 0$$

soit par intégration directe en espace,

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 u(x,s)\, dx = -V \left[u(x,s)\right]_{x=0}^{x=1} = 0$$

en utilisant la 1-périodicité en espace de $u(x,t)$. On obtient par intégration en temps sur $[0,t]$ la conservation de la masse. Par ailleurs, on intègre en espace sur $[0,1]$ l'équation (1) multipliée par $u(x,s)$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\, u(x,s)\, dx + V \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\, u(x,s)\, dx = 0$$

soit par intégration directe en espace

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_0^1 |u(x,s)|^2\, dx &= -V \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(u(x,s)^2)\, dx \\ &= -\frac{1}{2} V \left[u(x,s)^2 \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \end{aligned}$$

en utilisant la 1-périodicité en espace de $u(x,t)$. On obtient par intégration en temps sur $[0,t]$ la conservation de l'énergie $\displaystyle\int_0^1 |u(x,t)|^2\, dx$. L'équation de la chaleur et l'équation d'advection conservent toutes les 2 la masse. En revanche, la décroissance de l'énergie dans le cas de l'équation de la chaleur est due à la présence du terme de diffusion $-\nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et n'est pas partagée par le phénomène d'advection qui transporte l'énergie sans dissipation.

2. **Schéma centré explicite.**

(a) **Consistance.** Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on définit l'erreur de troncature par $\eta^n = (\eta_j^n)_{1 \leq j \leq J} \in R^J$: pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\eta_j^n = \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} + V \frac{\bar{U}_{j+1}^n - \bar{U}_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

Sous l'hypothèse $u^0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, la solution exacte de (1) $u \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R} \times [0,T])$, on peut donc effectuer des développements de Taylor à l'ordre 2 en temps et 3 en espace. On obtient

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O(\Delta t)$$

et

$$\frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2).$$

D'où la conclusion.

(b) **Stabilité** On utiise comme prédédemment l'analyse de stabilité par décomposition en série de Fourier. En observant que

$$e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x} = 2i\,\sin(2\pi k\Delta x),$$

il vient par transformation en série de Fourier, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{u}_k^{n+1} = (1 - i\,Co_a \sin(2\pi k\Delta x))\hat{u}_k^n = A_k\,\hat{u}_k^n.$$

On a :

$$|A_k|^2 = 1 + Co_a^2 \sin^2(2\pi k\Delta x) \geq 1 \quad \text{ et } \quad |A_k| = 1 \text{ ssi } 2k\Delta x = \frac{2k}{J} \in \mathbb{Z}$$

On en déduit que dès que $J \geq 3$ il existe des modes $k \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $|A_k| > 1$ ce qui rend le schéma centré explicite (2) inconditionnellement instable en norme L^2. Par méthode énergétique on peut prouver aisément que

$$\|U^n\|_2^2 = < U^{n+1}, U^n >_2 \leq \|U^{n+1}\|_2 \|U^n\|_2$$

et donc qu'il y a croissance de l'énergie discrète au cours du temps. Il reste à montrer que l'inégalité dans la majoration de Cauchy-Schwarz peut être stricte en uilisant justement comme donnée initiale la représentation spatiale d'un mode de Fourier tel que $|A_k| > 1$. Les deux démonstrations reposent bien sur le même argument.

3. **Schéma décentré amont.** .

(a) **Consistance.** Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on définit l'erreur de troncature par $\eta^n = (\eta_j^n)_{1\leq j\leq J} \in R^J$: pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\eta_j^n = \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} + V\frac{\bar{U}_j^n - \bar{U}_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Sous l'hypothèse $u^0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, la solution exacte de (1) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0,T])$, on peut donc effectuer des développements de Taylor à l'ordre 2 en temps et 2 en espace. On obtient

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O(\Delta t)$$

et

$$\frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x).$$

D'où la conclusion.

(b) **Stabilité L^∞.** On écrit le schéma (3) sous la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - Co_a\,U_j^n + Co_a\,U_{j-1}^n = (1 - Co_a)\,U_j^n + Co_a\,U_{j-1}^n$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$. Donc, pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\begin{aligned} |U_j^{n+1}| \leq |1 - Co_a|\,|U_j^n| + |Co_a|\,|U_{j-1}^n| &\leq (|1 - Co_a| + |Co_a|) \max_{1\leq j\leq J} |U_j^n| \\ &= (|1 - Co_a| + |Co_a|)\|U^n\|_\infty \end{aligned}$$

Sous la condition $0 \leq Co_a \leq 1$, on a pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\|U^{n+1}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq J} |U_j^{n+1}| \leq (\,(1 - Co_a) + Co_a)\|U^n\|_\infty = \|U^n\|_\infty$$

(c) **Convergence** L^∞. En introduisant les vecteurs erreurs $e^n = U^n - \bar{U^n}$ pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on a la relation entre erreur de convergence et erreur de consistance :

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\Delta t} + V \frac{e_j^n - e_{j-1}^n}{\Delta x} = -\eta_j^n$$

pour tout $1 \leq j \leq J$. Le résultat de stabilité précédent nous donne :

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + \Delta t \|\eta^n\|_\infty$$

. Par suite et comme $e^0 = 0$, pour tout $1 \leq n \leq N$

$$\|e^n\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \|\eta^k\|_\infty \leq T C_u(O(\Delta t) + O(\Delta x),)$$

avec C_u une constante ne dépendant que de la solution exacte u sous l'hypothèse de réfgularité $u^0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ d'après le résulatt de consistance précédent.

(d) **Convergence** L^2**.** La convergence en norme L^∞ implique la convergence en norme L^2. On peut établir directement cette convergence par analyse de Fourier. En observant que

$$1 - e^{-2i\pi k \Delta x} = e^{-i\pi k \Delta x} 2i \, \sin(\pi k \Delta x),$$

il vient par transformation en série de Fourier, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{u}_k^{n+1} = \Big[1 - 2\,Co_a \sin^2(\pi k \Delta x) - 2i\, Co_a \cos(\pi k \Delta x) \sin(\pi k \Delta x) \Big] \; \hat{u}_k^n = A_k \, \hat{u}_k^n.$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} |A_k|^2 & = & (1 - 2\,Co_a \sin^2(\pi k \Delta x))^2 + 4\,Co_a^2 \cos^2(\pi k \Delta x) \sin^2(\pi k \Delta x) \\ & = & 1 - 4\,Co_a \sin^2(\pi k \Delta x) + 4\,Co_a^2 \sin^2(\pi k \Delta x) \\ & = & 1 - 4\,Co_a\,(1 - Co_a) \, \sin^2(\pi k \Delta x) \end{array}$$

La condition de stabilité $|A_k| \leq 1$ est réalisée pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si $Co_a\,(1 - Co_a) \geq 0$ soit $0 \leq Co_a \leq 1$.

$$0 \leq \frac{V \Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Remarquez que si V est négatif (et donc Co_a), le schéma décentré amont devient instable, il faut dans ce cas là utiliser

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0$$

qui est bien décentré vis à vis de l'amont de l'écoulement.

(e) **Diffusion numérique**. On observe que

$$V \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = V \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V \Delta x}{2}\right) \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2},$$

ce qui fait intervenir un terme de diffusion numérique de valeur $\frac{V\Delta x}{2}$. C'est ce terme qui permet d'assurer la stabilité vis à vis du schéma centré explicite.

(f) **Résultats de conservation : cas discret.** Considérons maintenant la fonction 1-périodique $\tilde{u}^n$. On a pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tilde{u}^{n+1}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x U_j^{n+1} &= \sum_{j=1}^{J}(1-Co_a)\,U_j^n + Co_a\,U_{j-1}^n \\ &= \sum_{j=1}^{J} U_j^n = \int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx\end{aligned}$$

en utilisant la 1-périodicité de $\tilde{u}^n$. On en déduit la conservation de la masse discrète : pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{u}^0(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x u^0(x_j).$$

C'est l'équivalent discret du résultat de la question 1, où on a approché $\int_0^1 u^0(x)\,dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille. Par ailleurs, pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 |\tilde{u}^{n+1}(x)|^2\,dx = \|U^{n+1}\|_2^2$$

et donc par stabilité en norme L^2 du schéma sous la condition $0 \leq Co_a \leq 1$, pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx \leq \|U^0\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{J} \Delta x |u^0(x_j)|^2$$

On obtient au niveau discret une propriété de décroissance et non de conservation de l'énergie où on a approché $\int_0^1 |u^0(x)|^2\,dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille. Comme il existe des nombres d'onde pour lesquels $|A_k| < 1$ cette décroissance est stricte (sauf cas particuliers comme $Co_a = 1$).

4. **Schéma de Lax-Wendroff.**

(a) **Consistance.** Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on définit l'erreur de troncature par $\eta^n = (\eta_j^n)_{1 \leq j \leq J} \in R^J$: pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\eta_j^n = \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} + V\frac{\bar{U}_{j+1}^n - \bar{U}_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V^2 \Delta t}{2}\right)\frac{\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Sous l'hypothèse $u^0 \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$, la solution exacte de (1) $u \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R} \times [0,T])$, on peut donc effectuer des développements de Taylor à l'ordre 3 en temps et 3 ou 4 en espace. On obtient pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$:

$$\frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^n) + O(\Delta t^2),$$

$$\frac{u(x_{j+1},t^n) - u(x_{j-1},t^n)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) + O(\Delta x^2)$$

et

$$\frac{u(x_{j+1},t^n) - 2u(x_j,t^n) + u(x_{j-1},t^n)}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^n) + O(\Delta x^2)$$

En regroupant, il vient, pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$:

$$\eta_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_j, t^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2).$$

En utilisant le théorème de Schwarz, il vient si la solution exacte est suffisamment régulière :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-V\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -V\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

D'où la conclusion.

(b) **Stabilité** L^2.On utiise comme prédédemment l'analyse de stabilité par décomposition en série de Fourier. Pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$\begin{aligned}
\hat{u}_k^{n+1} &= \left[1 - i\,Co_a\sin(2\pi k\Delta x) + \frac{Co_a^2}{2}(-4\sin^2(\pi k\Delta x))\right]\,\hat{u}_k^n \\
&= \left[1 - 2Co_a^2\,\sin^2(\pi k\Delta x) - 2i\,Co_a\sin(\pi k\Delta x)\cos(\pi k\Delta x)\right]\,\hat{u}_k^n \\
&= A_k\,\hat{u}_k^n
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
|A_k|^2 &= (1 - 2\,Co_a^2\sin^2(\pi k\Delta x))^2 + 4\,Co_a^2\cos^2(\pi k\Delta x)\sin^2(\pi k\Delta x) \\
&= 1 - 4\,Co_a^2\sin^2(\pi k\Delta x)(1 - cos^2(\pi k\Delta x)) + 4\,Co_a^4\sin^4(\pi k\Delta x) \\
&= 1 - 4\,Co_a^2\,(1 - Co_a^2)\,\sin^4(\pi k\Delta x)
\end{aligned}$$

La condition de stabilité $|A_k| \leq 1$ est réalisée pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si $Co_a^2\,(1 - Co_a^2) \geq 0$ soit $0 \leq Co_a \leq 1$. Le schéma (4) est stable en norme L^2 sous la condition CFL

$$Co_a^2 \leq 1.$$

Remarquer que la condition de stabilité s'étend au cas $V < 0$, le terme de diffusion stabilise le schéma centré explicite quel que soit le sens de l'écoulement.

(c) **Convergence** L^2. En introduisant les vecteurs erreurs de convergence $e^n = U^n - \bar{U}^n$ et en les reliant à l'erreur de consistance η^n, on démontre sans problème la convergence du schéma de Lax-Wendroff (4) en norme L^2 et à l'ordre 2 en temps et en espace. (Cf théorème de Lax : stabilité + consistance implique convergence).

(d) **Stabilité** L^∞ **?** Soit $k \in \{1, \cdots, J-1\}$ un indice fixé. On considère $V^{(k)} \in \mathbb{R}^J$ telle que si $k \in \{1, \cdots, J-1\}$ est un indice fixé, $V_j^{(k)} = 1$ si $1 \leq j \leq k$, $V_j^{(k)} = 0$ sinon, pour tout $1 \leq j \leq J$. Considérons $U^0 = V^{(k)}$ comme donnée initiale du schéma de démarrage, on obtient alors pour U^1 à l'indice k :

$$U_k^1 = U_k^0 - Co_a\frac{-U_{k-1}^0}{2} + Co_a^2\frac{-2U_k^0 + U_{k-1}^0}{2} = 1 + \frac{Co_a}{2}(1 - Co_a).$$

Si $0 < Co_a < 1$, alors $\|U^1\|_\infty > 1$ et $\|U^0\|_\infty = \|V^{(k)}\|_\infty = 1$. Le schéma n'est donc pas stable en norme L^∞ sous la condition CFL. Les cas $Co_a = 0$ et $Co_a = 1$ sont stables en norme L^∞, il est facile de vérifier que pour $Co_a = 0$ on a $U^{n+1} = U^n$ pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour $Co_a = 1$, $\tilde{u}^{n+1}(x) = \tilde{u}^n(x - \Delta x) = \tilde{u}^n(x - V\Delta t) = \tilde{u}^0(x - V(n+1)\Delta t)$ et par suite le schéma est exact donc convergent pour toutes les normes.

(e) **Résultats de conservation : cas discret.** Considérons maintenant la fonction 1-périodique $\tilde{u}^n$. On a pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 \tilde{u}^{n+1}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x U_j^{n+1}$$

Le schéma fait apparaître 2 termes, un terme d'advection et un terme de diffusion. Pour le terme d'advection, on a pour tout vecteur $X = (X_j)_{1\leq j\leq J} \in \mathbb{R}^J$ prolongé par périodicité $X_0 = X_J$ et $X_{J+1} = X_1$,

$$\sum_{j=1}^{J} \Delta x (X_{j+1} - X_{j-1}) = 0$$

par périodicité de $\tilde{u}$.
Pour le terme de diffusion, on a

$$\sum_{j=1}^{J} \Delta x (X_{j+1} - 2X_j + X_{j-1}) =< BX, 1 >_2 =< X, B1 >_2 = 0$$

où 1 est le vecteur de composantes constantes égales à 1 et B la matrice introduite pour l'équation de la chaleur et correspondant au terme de diffusion. On en déduit que la solution $\tilde{u}$ du schéma de Lax-Wendroff vérifie :

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = 0.$$

On en déduit la conservation de la masse discrète : pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{u}^0(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x u^0(x_j)$$

Par ailleurs, pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 |\tilde{u}^{n+1}(x)|^2\,dx = \|U^{n+1}\|_2^2$$

et donc par stabilité en norme L^2 du schéma, pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx \leq \|U^0\|_2^2 = \sum_{j=1}^{J} \Delta x |u^0(x_j)|^2$$

On a donc une propriété de décroissance de l'énergie et elle est stricte si $0 < Co_a < 1$, contrairement au cas continu où l'énergie se conserve.