Analyse numérique et optimisation

TD n^{o}2 I. Terrasse - Groupes 6&13

Différences Finies en temps et en espace

Exercice 1

Problème aux limites
Soit le problème aux limites

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u \in \mathcal{C}^2([0,L]) \quad \text{tel que} \\ -u''(x) = f \quad ,\forall x \in]0,L[, \\ u(0) = a, \\ u(L) = b, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction donnée de $\mathcal{C}^0([0,L])$ et a et b des réels donnés.

1. **Cas continu : écriture intégrale** En intégrant 2 fois l'"équation différentielle et en utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$u(x) = \int_0^L G(x,s)f(s)\,ds \;+\; a\,\frac{(L-x)}{L} + b\,\frac{x}{L} \tag{2}$$

où pour tout $(x,s) \in [0,1] \times [0,1]$, G dite *fonction de Green* est définie par :

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{s(L-x)}{L} & \text{si } 0 \le s \le x \le L, \\ \dfrac{x(L-s)}{L} & \text{si } 0 \le x \le s \le L. \end{cases} \tag{3}$$

En déduire que le problème (1) est bien posé au sens de Hadamard. On exprimera la dépendance continue en les données du problème sous la forme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^2} = \max\Big(\|u\|_{\mathcal{C}^0}, L\|u'\|_{\mathcal{C}^0}, L^2\|u''\|_{\mathcal{C}^0}\Big) \le C_1\|f\|_{\mathcal{C}^0} + C_2|a| + C_3|b|$$

avec des constantes C_1, C_2, C_3 que l'on précisera.

2. **Cas continu : principe du maximum.** Montrer que si $f \ge 0$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, alors $u \ge 0$. Noter que cela permet de retrouver l'unicité de la solution du problème (1).
Montrer le résultat de régularité suivant : si pour tout entier $k \ge 0$, $f \in \mathcal{C}^k([0,L])$ alors $u \in \mathcal{C}^{k+2}([0,L])$
Dans la suite de l'exercice, on s'intéressera à la fonction

$$u(x) - \left[a\,\frac{(L-x)}{L} + b\,\frac{x}{L}\right]$$

que l'on continuera à noter $u(x)$ qui est la solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème homogène pour les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u \in \mathcal{C}^2([0,L]) \quad \text{tel que} \\ -u''(x) = f \quad \forall x \in]0,L[, \\ u(0) = 0, \\ u(L) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

3. **Discrétisation.** Soit un entier $J > 0$ et le pas d'espace $\Delta x = \dfrac{L}{J+1}$. On introduit les points discrets $x_j = j\,\Delta x$ pour tout $0 \leq j \leq J+1$. On considère l'approximation par différences finies :
$$\frac{-U_{j+1} + 2U_j - U_{j-1}}{\Delta x^2} = f(x_j) \quad 1 \leq j \leq J, \tag{5}$$
avec $U_0 = U_{J+1} = 0$. Ecrire ce schéma sous la forme matricielle
$$AU = F$$
où $U = (U_i)_{1\leq i\leq J} \in \mathbb{R}^J$ est le vecteur inconnu, en précisant les composantes de la matrice $A \in \mathbb{R}^{J,J}$ et du vecteur $F \in \mathbb{R}^J$.
4. **Problème discret : existence et unicité.** Montrer que la matrice A est symétrique, définie positive : on écrira $< AX, Y >_J$ sous forme symétrique en X et Y, avec $< . >_J$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^J$, pour tout vecteur X, Y de $\mathbb{R}^J$ pour lesquels on notera $X_0 = Y_0 = X_{J+1} = Y_{J+1} = 0$. En déduire que le problème discret admet une et une seule solution.
5. **Principe du maximum discret** Montrer que si $F_j \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$, alors $U_j \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$. On raisonnera pas l'absurde en supposant que $\mu := \min\limits_{1\leq j\leq J} U_j < 0$ et en considérant l'indice $i \in \{1, \cdots, J\}$ pour lequel le minimum est atteint. En déduire que $A^{-1}_{ij} \geq 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq J$.
6. **Calcul explicite de A^{-1}.** Montrer que pour tout $1 \leq i, j \leq J$, $(A^{-1})_{ij} = \Delta x\, G(x_i, x_j)$ où G est la fonction de Green continue définie par (3). En déduire l'expression explicite de U_j pour tout $1 \leq j \leq J$ et comparer avec l'expression (2) obtenue pour la solution exacte. Noter que l'on retrouve le principe du maximum discret.
7. **Erreur de convergence / erreur de troncature locale.** Etablir l'équation vérifiée par le vecteur $e \in \mathbb{R}^J$ de composantes $e_j = U_j - \bar{U}_j$ pour tout $1 \leq j \leq J$ où $\bar{U} = (\bar{U}_i)_{1\leq i\leq J} = (u(x_i))_{1\leq i\leq J} \in \mathbb{R}^J$ est le vecteur de composantes la valeur de la solution exacte u du problème (4) aux points discrets. En écrivant cette équation sous la forme $Ae = \eta$, préciser les composantes du vecteur $\eta \in \mathbb{R}^J$ qui correspond à l'erreur de troncature locale.
8. **Consistance du schéma à l'ordre 2**. Montrer que sous l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$, on a
$$\|\eta\|_\infty := \max_{1\leq j\leq J} |\eta_j| \leq C_f\, \Delta x^2,$$
où C_f est une constante à déterminer (en fonction de f).
9. **Stabilité L^∞.** On rappelle que la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|_\infty$ est définie pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{J,J}$ par :
$$\|M\|_\infty = \max_{1\leq i\leq J} \sum_{j=1}^{J} |M_{ij}|$$
En considérant $w(x)$ la solution exacte pour la donnée f_1 fonction constante égale à 1 sur $[0, L]$ et en justifiant que $\|A^{-1}\|_\infty = \|\bar{W}\|_\infty$, montrer que $\|A^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{L^2}{8}$.
10. **Convergence L^∞.** Déduire des questions précédentes que sous l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$, le schéma aux différences finies (5) est convergent en norme L^∞ et préciser son ordre.

11. **Convergence L^2.** On s'intéresse à la convergence dans une norme faisant intervenir les variations spatiales de l'erreur. Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^J$, avec les conventions de notation précédentes, on considère les 2 normes suivantes sur $\mathbb{R}^J$:

$$\|X\|_A = \left(\sum_{j=1}^{J+1} \frac{1}{\Delta x}|X_j - X_{j-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|X\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{J} \Delta x |X_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on note $< . >_A$ et $< . >_2$ les produits scalaires associés.
- Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^J$, $\|X\|_2 \leq L^{1/2}\|X\|_\infty \leq L\|X\|_A$. On écrira que pour tout $1 \leq i \leq J$, $X_i = X_0 + (X_1 - X_0) + \cdots + (X_i - X_{i-1})$.
- Montrer que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^J$, $< X, Y >_A = < AX, Y >_2$. En déduire que $\|e\|_A \leq L\|\eta\|_2$.
- En déduire la convergence du schéma en norme $\|.\|_A$ et norme $\|.\|_2$ et préciser les majorations obtenues.

Exercice 2

Equation de diffusion-chaleur.

Soient T un réel strictement positif, $\nu > 0$ un coefficient de diffusion (unité : m^2/s) et $u^0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction donnée 1-périodique. On s'intéresse à l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R} \text{ 1-périodique telle que} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,T[, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6}$$

On admet que le problème (6) admet une et une seule solution régulière bornée.

1. **Conservation de la masse (pour une équation de diffusion)** Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,
$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = \int_0^1 u^0(x)\,dx$$
2. **Décroissance de l'énergie.** Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,
$$\frac{1}{2}\int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u^0(x)|^2\,dx$$
3. **Décomposition en série de Fourier en espace (périodicité)**. Pour tout $t \in [0,T]$, on décompose la solution $u(.,t)$ selon sa série de Fourier :
$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(t)\, e^{2i\pi kx}. \tag{7}$$
Déterminer l'équation différentielle en temps vérifiée par les fonctions $\hat{u}_k(t)$ (on procédera formellement en supposant que la régularité de la solution $u(.,t)$ est suffisante pour justifier ces manipulations).
4. **Discrétisation par un θ-schéma en temps.** Soit $\theta \in [0,1]$ un paramètre réel. On considère un entier $N > 0$ et le pas de temps $\Delta t = \dfrac{T}{N}$. On introduit pour tout $0 \leq$

$n \leq N$, $t^n = n\Delta t$ l'instant discret. On considère par ailleurs un entier $J > 0$ et le pas d'espace $\Delta x = \dfrac{1}{J}$. On introduit les points discrets $x_j = j\,\Delta x$ pour tout $-1 \leq j \leq J+1$ et on étendra cette notation à $j \in \mathbb{Q}$. On considère l'approximation par différences finies de l'équation de la chaleur par le θ-schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \theta\nu \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1-\theta)\nu \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \qquad (8)$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$. On ajoute les conditions de 1-périodicité :

$$\forall\, 0 \leq n \leq N-1, \quad U_0^n = U_J^n \quad \text{et} \quad U_{J+1}^n = U_1^n$$

et la condition initiale de démarrage en $n = 0$

$$\forall\, 1 \leq j \leq J, \quad U_j^0 = u^0(x_j).$$

On introduit le nombre adimensionnel (appelé nombre de Courant diffusif)

$$Co_d = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$$

Pour tout $0 \leq n \leq N$, on introduit le vecteur $U^n = (U_i^n)_{1 \leq i \leq J} \in \mathbb{R}^J$. Ecrire le θ-schéma (8)sous la forme matricielle pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$(B_I^\theta)^{-1} U^{n+1} = B_E^\theta U^n$$

avec

$$B_I^\theta = (I + \theta Co_d B)^{-1} \qquad B_E^\theta = I - (1-\theta) Co_d B$$

avec I matrice d'identité d'ordre J et B une matrice carrée d'ordre J que l'on explicitera. A quoi correspondent B_I^θ et B_E^θ quand θ vaut 0 et 1 ? Justifier l'existence de la matrice B_I^θ.

5. **Erreur de convergence / erreur de troncature.** Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on introduit le vecteur erreur $e^n \in \mathbb{R}^J$ de composantes $e_j^n = U_j^n - \bar{U}_j^n$ pour tout $1 \leq j \leq J$ où $\bar{U}^n = (\bar{U}_i^n)_{1 \leq i \leq J} = (u(x_i, t^n))_{1 \leq i \leq J} \in \mathbb{R}^J$ est le vecteur de composantes la valeur de la solution exacte u du problème (6) aux points discrets en espace et au temps t^n. Par 1-périodicité, on a $e_0^n = e_J^n$ et $e_{J+1}^n = e_1^n$ pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et par la condition initiale $e_j^0 = 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$. Montrer que, pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$(B_I^\theta)^{-1} e^{n+1} = B_E^\theta e^n - \Delta t \eta^n \qquad (9)$$

en précisant les composantes du vecteur des erreurs de troncature $\eta^n \in \mathbb{R}^J$.

6. **Consistance.** Montrer que le θ-schéma est consistant et d'ordre au moins un en temps et deux en espace. Préciser la régularité demandée sur la solution exacte. Que se passe-t-il si $\theta = 1/2$.

7. **Stabilité L^2 du θ-schéma par analyse de Fourier.** On notera $< .,. >_2$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ associée à la norme L^2 sur $\mathbb{R}^J$, définie pour tout $X \in \mathbb{R}^J$ par $\|X\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{J} \Delta x |X_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Montrer en utilisant la décomposition en série de Fourier des fonctions

$\tilde{u}^n(x)$ 1-périodiques constantes par morceaux sur les intervalles $]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$, $1 \le j \le J$ associées à U^n pour tout $0 \le n \le N-1$ que le θ-schéma est inconditionnellement stable en norme L^2 si $\theta \ge 1/2$ et conditionnellement stable si $\theta < 1/2$ sous la condition de stabilité (dite **condition CFL**) :

$$2(1-2\theta)\nu\Delta t \le \Delta x^2$$

Vérifier que lorsque $\Delta x \to 0$ les coefficients de la série de Fourier de la solution discrète sont régis par un schéma aux différences finies en temps qui est la discrétisation de l'équation différentielle obtenue pour les fonctions $\hat{u}_k(t)$ à la question 3.

8. **Convergence en norme L^2.** Etablir un résultat de convergence en norme L^2 pour le θ-schéma (8). En considérant pour $0 \le n \le N$, $\tilde{u}^n(x)$ la fonction 1-périodique constante par morceaux associée à U^n, établir un résultat de conservation de la masse discrète $\displaystyle\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx$ et de décroissance de l'énergie discrète $\displaystyle\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx$. Comparer avec le cas continu (questions 1 et 2).
9. **Stabilité L^2 par méthode énergétique** Nous considérons une approche alternative de la stabilité L^2 qui est utilisée dans des cas plus généraux que l'analyse par Fourier (coefficients non constants par exemple). On note pour tout $0 \le n \le N-1$

$$U^{n+\theta} = \theta\, U^{n+1} \;+\; (1-\theta)\, U^n$$

Etablir l'identité d'énergie :

$$\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|_2^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|_2^2 + \frac{1}{2}(2\theta-1)\|U^{n+1}-U^n\|_2^2 + Co_d\,(BU^{n+\theta}, U^{n+\theta}) = 0$$

La matrice B étant symétrique positive, on rappelle (TD n° 1) que pour tout $X \in \mathbb{R}^J$

$$< BX, X >_2 \le \|B\|_2 \|X\|_2^2 \quad \text{et} \quad \|BX\|_2^2 \le \|B\|_2 < BX, X >_2$$

et que les majorations sont optimales. Montrer que $\|B\|_2 \le 4$. Retrouver les résultats précédents de stabilité L^2.

Exercice 3

Equation d'advection.

Soient T un réel strictement positif, $V > 0$ une vitesse d'advection (unité : m/s) et $u^0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction donnée 1-périodique. On s'intéresse à l'équation d'advection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher} \quad u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R} \text{ 1-périodique telle que} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + V\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,T[, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{10}$$

La solution exacte s'écrit $u(x,t) = u^0(x - Vt)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$.

1. **Résultats de conservation : cas continu.** Sans utiliser la forme explicite de la solution exacte, établir pour tout $t \in]0,T[$ les résultats de conservation de la masse et de l'énergie :

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = \int_0^1 u^0(x)\,dx, \qquad \int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx = \int_0^1 |u^0(x)|^2\,dx.$$

Commenter par rapport à l'équation de la chaleur.

Dans la suite, nous allons étudier différents schémas aux différences finies en espace et en temps pour l'équation d'advection (10). On considère un entier $N > 0$ et le pas de temps $\Delta t = \dfrac{T}{N}$. On introduit pour tout $0 \le n \le N$, $t^n = n\Delta t$ l'instant discret. On considère par ailleurs un entier $J > 0$ et le pas d'espace $\Delta x = \dfrac{1}{J}$. On introduit les points discrets $x_j = j\,\Delta x$ pour tout $-1 \le j \le J+1$ et on étendra cette notation à $j \in \mathbb{Q}$. Pour tout $0 \le n \le N$, on introduit le vecteur $U^n = (U_i^n)_{1\le i\le J} \in \mathbb{R}^J$ avec l'objectif que $U_i^n \simeq u(x_i, t^n) = \bar{U}_i^n$. On ajoute les conditions de 1-périodicité :

$$\forall\, 0 \le n \le N-1, \quad U_0^n = U_J^n \quad \text{et} \quad U_{J+1}^n = U_1^n$$

et pour tous les schémas à étudier, la condition initiale de démarrage en $n = 0$

$$\forall\, 1 \le j \le J, \quad U_j^0 = u^0(x_j).$$

Enfin, on introduit le nombre adimensionnel (appelé nombre de Courant advectif)

$$Co_a = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$$

2. **Schéma centré explicite.** On considère le schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{11}$$

pour tout $0 \le n \le N-1$ et pour tout $1 \le j \le J$.

(a) **Consistance.** Montrer que pour $u^0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ le schéma (11) est d'ordre un en temps et deux en espace.

(b) **Non stabilité** L^2 Montrer que le schéma (11) est inconditionnellement instable en norme L^2 dès que l'on a éliminé les cas triviaux $J = 1$ et $J = 2$.

3. **Schéma décentré amont.** On considère le schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{12}$$

pour tout $0 \le n \le N-1$ et pour tout $1 \le j \le J$.

(a) **Consistance.** Montrer que pour $u^0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ le schéma (12) est d'ordre un en temps et un en espace.

(b) **Stabilité L^∞.** Montrer que le schéma (12) est stable en norme L^∞ sous la condition CFL

$$Co_a \le 1.$$

(c) **Convergence** L^∞. En déduire un résultat de convergence en norme L^∞ du schéma décentré amont (12).

(d) **Convergence L^2.** Qu'en est-il en norme L^2 ?

(e) **Diffusion numérique**. Montrer que le schéma décentré amont peut s'écrire comme une modification du schéma centré explicite par ajout d'un terme de diffusion numérique qu'on explicitera.

(f) **Résultats de conservation : cas discret.** En considérant pour $0 \leq n \leq N$, $\tilde{u}^n(x)$ la fonction 1-périodique constante par morceaux associée à U^n, établir un résultat de conservation de la masse discrète $\displaystyle\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx$ et de décroissance de l'énergie discrète $\displaystyle\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx$. Comparer avec le cas continu (question 1).

4. **Schéma de Lax-Wendroff.** On considère le schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V^2\Delta t}{2}\right)\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \qquad (13)$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$.

(a) **Consistance.** Montrer que pour $u^0 \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ le schéma (13) est d'ordre deux en temps et deux en espace.

(b) **Stabilité** L^2. Montrer que le schéma (13) est stable en norme L^2 sous la condition CFL

$$Co_a \leq 1.$$

(c) **Convergence** L^2. En déduire un résultat de convergence en norme L^2 du schéma de Lax-Wendroff (13).

(d) **Stabilité** L^∞ **?** On s'intéresse à une donnée initiale $V^{(k)} \in \mathbb{R}^J$ telle que si $k \in \{1, \cdots, J-1\}$ est un indice fixé, $V_j^{(k)} = 1$ si $1 \leq j \leq k$, $V_j^{(k)} = 0$ sinon, pour tout $1 \leq j \leq J$. Conclure sur la stabilité L^∞ du schéma de Lax-Wendroff (13).

(e) **Résultats de conservation : cas discret.** En considérant pour $0 \leq n \leq N$, $\tilde{u}^n(x)$ la fonction 1-périodique constante par morceaux associée à U^n, préciser et commenter le comportement de $\displaystyle\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx$ et de $\displaystyle\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx$.

Eléments de Correction

Exercice 1

Problème aux limites

1. **Cas continu : écriture intégrale** On intègre 2 fois l'équation différentielle, il vient $\forall x \in [0, L]$
$$u(x) = -\int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt + cx + d$$
avec c et d 2 constantes d'intégration. . En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :
$$\int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt = \int_0^x \left(\int_s^x f(s)dt \right) ds = \int_0^x (x-s)\, f(s)ds$$
et donc
$$u(x) = -\int_0^x (x-s)\, f(s)ds + cx + d$$
En utilisant les conditions au bord $u(0) = a$ et $u(L) = b$, on détermine les constantes c et d :
$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_0^x (x-s)f(s)ds + \frac{x}{L}\int_0^L (L-s)f(s)ds + a\frac{L-x}{L} + b\frac{x}{L} \\ &= \int_0^x \left(-\frac{L(x-s)}{L} + \frac{x}{L}(L-s) \right) f(s)ds + \frac{x}{L}\int_x^L (L-s)f(s)ds + a\frac{L-x}{L} + b\frac{x}{L} \\ &= \int_0^L G(x,s)f(s)ds \;+\; a\,\frac{(L-x)}{L} \;+ b\,\frac{x}{L} \end{aligned}$$
avec la *fonction de Green* G définie par (3). On en déduit l'existence et unicité de la solution du problème (1) donnée par la formulation explicite (2). De plus, en remarquant que la fonction $G(x, s)$ est positive sur son domaine de définition, $\forall x \in [0, L]$
$$|u(x)| \leq \|f\|_{C^0} \int_0^L G(x,s)\, ds + \;|a|\; + \;|b|$$
et $\forall x \in [0, L]$,
$$\begin{aligned} \int_0^L G(x,s)\, ds &= \frac{(L-x)}{L}\int_0^x s ds + \frac{x}{L}\int_x^L (L-s)ds \\ &= \frac{(L-x)x^2}{2L} + \frac{x(L-x)^2}{2L} = \frac{(L-x)x}{2} \leq \frac{L^2}{8} \end{aligned}$$
donc
$$\|u\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x\in[0,L]} |u(x)| \leq \frac{L^2}{8}\|f\|_{\mathcal{C}^0} + |a| + |b|$$
En dérivant (2), on obtient $\forall x \in [0, L]$
$$u'(x) = -\frac{1}{L}\int_0^x s f(s)ds + \frac{1}{L}\int_x^L (L-s)f(s)ds - \frac{a}{L} + \frac{b}{L}$$

et donc toujours par un argument de positivité de l'intégrande

$$|u'(x)| \leq \|f\|_{C^0} \frac{1}{L} \int_0^x s\,ds + \frac{1}{L} \int_x^L (L-s)ds + \frac{|a|}{L} + \frac{|b|}{L}$$

et $\forall x \in [0, L]$,

$$\frac{1}{L} \int_0^x s\,ds + \frac{1}{L} \int_x^L (L-s)ds = \frac{x^2}{2L} + \frac{(L-x)^2}{2L} \leq \frac{L}{2}$$

donc

$$\|u'\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x\in[0,L]} |u'(x)| \leq \frac{L}{2} \|f\|_{\mathcal{C}^0} + \frac{|a|}{L} + \frac{|b|}{L}$$

En dérivant de nouveau, on obtient bien sûr, $\forall x \in [0, L]$:

$$u''(x) = -f(x)$$

et donc la troisième majoration :

$$\|u''\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x\in[0,L]} |u''(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0}$$

La solution dépend donc continûment des données et par suite le problème est bien posé au sens d'Hadamard et

$$\|u\|_{\mathcal{C}^2} = \max\left(\|u\|_{\mathcal{C}^0}, L\|u'\|_{\mathcal{C}^0}, L^2\|u''\|_{\mathcal{C}^0}\right) \leq L^2\|f\|_{\mathcal{C}^0} + |a| + |b|.$$

2. **Cas continu : principe du maximum.**Comme $G(x,s)$ est positive sur son domaine de définition, la représentation intégrale (2) donne immédiatement le principe du maximum : si $f \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, alors $u \geq 0$.

   Remarquons que par linéarité, s'il y a 2 solutions au problème aux limites (1), leur différence est solution du même problème avec f, a et b nulles, le principe du maximum appliqué à f, a, b et $-f, -a, -b$ nous donne l'unicité de la solution.

   Le résultat de régularité découle de l'équation $u'' = -f$. Si $f \in \mathcal{C}^0([0, L])$, on a montré $u \in \mathcal{C}^2([0, L])$. Pour $k \geq 1$, si $f \in \mathcal{C}^k([0, L])$ alors pour tout $1 \leq k' \leq k$, $u^{(k'+2)} = -f^{(k')} \in \mathcal{C}^0([0, L])$ et donc $u \in \mathcal{C}^{k+2}([0, L])$. La solution gagne 2 ordres de régularité par rapport à la donnée f.

3. **Discrétisation.** Par changement d'inconnue on se ramène au problème homogène pour les données aux limites. Le schéma proposé s'écrit

   $$AU = F$$

   avec la matrice $A \in \mathbb{R}^{J,J}$ et le vecteur $F \in \mathbb{R}^J$:

   $$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \\ \vdots \\ f(x_{J-1}) \\ f(x_J) \end{pmatrix}.$$

4. **Problème discret : existence et unicité.** Un calcul direct montre que pour tout vecteur X, Y de $\mathbb{R}^J$

$$\begin{aligned}
< AX, Y >_J &= \sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J} A_{ij}X_jY_i = \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J}(-X_{i-1}+2X_i-X_{i+1})Y_i \\
&= \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J}(X_i-X_{i+1})Y_i + \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J}(X_i-X_{i-1})Y_i \\
&= \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=0}^{J}(X_i-X_{i+1})Y_i + \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J+1}(X_i-X_{i-1})Y_i \\
&= \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J+1}(X_{i-1}-X_i)Y_{i-1} + \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J+1}(X_i-X_{i-1})Y_i \\
&= \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J+1}(X_i-X_{i-1})(Y_i-Y_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{J+1}\frac{X_i-X_{i-1}}{\Delta x}\frac{Y_i-Y_{i-1}}{\Delta x} =< X, AY >_J
\end{aligned}$$

avec la convention $X_0 = Y_0 = X_{J+1} = Y_{J+1} = 0.$. Nous venons d'effectuer l'équivalent d'une intégration par parties dans le cas discret. On a en particulier pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^J$

$$< AX, X >_J= \sum_{i=1}^{J+1}\left(\frac{X_i-X_{i-1}}{\Delta x}\right)^2 \geq 0$$

Et si $< AX, X >_J= 0$ alors pour tout $1 \leq i \leq J+1$, $X_0 = X_1 = \cdots = X_{i-1} = X_i = \cdots = X_J = X_{J+1}$, la nullité aux bords entraîne que $X = 0$. La matrice A est donc symétrique définie positive. Elle diagonalise en base orthonormée et ses valeurs propres sont toutes réelles et strictement positives, en particulier 0 n'est pas valeur propre et par suite la matrice est inversible, le problème discret (5) admet une et une seule solution pour tout $F \in \mathbb{R}^J$.

5. **Principe du maximum discret** Soit F tel que $F_j \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$. Démontrons par l'absurde que $\mu := \min\limits_{1\leq j\leq J} U_j \geq 0$. On suppose $\mu < 0$ et on pose $i \in \{1, \cdots, J\}$ un indice (il en existe au moins 1) pour lequel le minimum est atteint : $U_i = \min\limits_{1\leq j\leq J} U_j = \mu$. Si $1 < i < J$, alors comme U est solution de $AU = F$ la i-ème ligne s'écrit

$$2U_i - U_{i+1} - U_{i-1} = \Delta x^2 F_i \geq 0$$

par hypothèse sur F. Donc

$$0 \leq (U_i - U_{i+1}) + (U_i - U_{i-1}) = (\mu - U_{i+i}) + (\mu - U_{i-1}) \leq 0$$

car $U_i = \mu$ est un minimum. Donc

$$U_{i-1} = U_i = U_{i+1} = \mu$$

Donc les indices $i-1$ et $i+1$ réalisent aussi le minimum. De proche en proche, $U_1 = U_J = \mu$. On considère alors la première ou la dernière ligne de la matrice$A$:

$$0 \leq \Delta x^2 F_1 = U_1 + (U_1 - U_2) \leq U_1 = \mu < 0$$

ce qui est une contradiction. En remarquant que $U_0 = U_{J+1} = 0$, on peut même écrire si $F_j \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\mu = \min_{0 \leq j \leq J+1} U_j \geq 0$$

qui est l'équivalent pour la solution du schéma discret de principe du maximum démontré dans le cas continu pour la solution exacte.
On considère pour $1 \leq j \leq J$ fixé le vecteur $F^j = (0 \cdots 1 \cdots 0) = (\delta_{ij})_{1 \leq i \leq J}$ (δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker) et X^j la solution de $AX^j = F^j$. Par construction, $X^j = A^{-1}F^j$ et pour tout $1 \leq i \leq J$, la i-ème ligne s'écrit

$$X_i^j = \sum_{k=1}^{J} A_{ik}^{-1} F_k^j = \sum_{k=1}^{J} A_{ik}^{-1} \delta_{kj} = A_{ij}^{-1}$$

D'après le principe du maximum, comme pour tout $1 \leq i, j \leq J$, $F_i^j = \delta_{ij} \geq 0$, $X_i^j = A_{ij}^{-1} \geq 0$. L'inverse de la matrice A a tous ses coefficients positifs ou nuls.

6. **Calcul explicite de A^{-1}.** Pour le calcul explicite de A^{-1}, d'après la question précédente on doit calculer pour chaque $1 \leq j \leq J$ la solution X^j de $AX^j = F^j$. Si $1 < j \leq J$, les $(j-1)$-èmes premières lignes du système sont à second membre nul. On fixe X_1^j comme paramètre et on obtient successivement

$$\begin{array}{l} X_2^j = 2X_1^j \\ X_3^j = 2X_2^j - X_1^j = 4X_1^j - X_1^j = 3X_1^j \\ \vdots \\ X_j^j = 2X_{j-1}^j - X_{j-2}^j = 2(j-1)X_1^j - (j-2)X_1^j = j\, X_1^j \end{array}$$

Si $1 \leq j < J$, les $(J-j)$-èmes dernières lignes du système sont à second membre nul. On fixe X_J^j comme paramètre et on obtient successivement

$$\begin{array}{l} X_{J-1}^j = 2X_J^j = (J+1-(J-1))X_J^j \\ X_{J-2}^j = 2X_{J-1}^j - X_J^j = 4X_J^j - X_J^j = (J+1-(J-2))X_J^j \\ \vdots \\ X_j^j = 2X_{j+1}^j - X_{j+2}^j = 2(J-j)X_J^j - (J-j-1)X_J^j = (J+1-j)\, X_J^j \end{array}$$

Donc pour tout $1 \leq j \leq J$

$$X_i^j = iX_1^j = \frac{i}{j} X_j^j \quad 1 \leq i \leq j \qquad \text{et } X_i^j = (J+1-i)X_J^j = \frac{J+1-i}{J+1-j} X_j^j \quad j \leq i \leq J$$

Pour finir la résolution et trouver l'unique inconnue restante X_j^j, il nous reste à utiliser la j-ème ligne du système en introduisant si besoin $X_0^j = 0 * X_j^j$ ou $X_{J+1}^j = (J+1-(J+1))X_j^j$, soit :

$$\begin{aligned} \Delta x^2 &= 2X_j^j - X_{j-1}^j - X_{j+1}^j = X_j^j - X_{j-1}^j + X_j^j - X_{j+1}^j \\ &= \frac{j-(j-1)}{j} X_j^j + \frac{J+1-j-(J+1-(j+1))}{J+1-j} X_j^j \\ &= \frac{1}{j} X_j^j + \frac{1}{J+1-j} X_j^j = \frac{J+1}{j(J+1-j)} X_j^j \end{aligned}$$

Soit en remarquant que $(J+1) = L/\Delta x$ et que les points de la grille $x_i = i\Delta x$

$$X_j^j = \frac{\Delta x}{L}(j\Delta x)(J+1-j)\Delta x = \Delta x \frac{x_j(L-x_j)}{L} = \Delta x G(x_j, x_j)$$

et donc comme $X_i^j = A_{ij}^{-1}$, on obtient explicitement, pour tout $1 \leq i, j \leq J$

$$A_{ij}^{-1} = \Delta x \frac{x_i(L-x_j)}{L} \quad 1 \leq i \leq j \quad \text{et } A_{ij}^{-1} = \Delta x \frac{x_j(L-x_i)}{L} \quad j \leq i \leq J$$

soit $1 \leq i, j \leq J$, $\left(A^{-1}\right)_{ij} = \Delta x \, G(x_i, x_j)$ où G est la fonction de Green continue définie par (3). Cette fonction étant positive sur toutes les valeurs de x_i et x_j, on retrouve que la matrice A^{-1} a ses coefficients positifs ou nuls et donc le principe du maximum discret. Explicitons la solution U du système $AU = F$: pour tout $1 \leq i \leq J$

$$\begin{aligned} U_i &= \sum_{j=1}^{J} A_{ij}^{-1} F_j = \Delta x \sum_{j=1}^{J} G(x_i, x_j) F_j = \Delta x \sum_{j=0}^{J} G(x_i, x_j) F_j \\ &= \sum_{j=0}^{J} \int_{x_j}^{x_{j+1}} G(x_i, x_j) f(x_j) ds \end{aligned}$$

à comparer avec l'expression (2) obtenue pour la solution exacte

$$\begin{aligned} u(x_i) &= \int_0^L G(x_i, s) f(s) ds = \sum_{j=0}^{J} \int_{x_j}^{x_{j+1}} G(x_i, s) f(s) ds \\ &\simeq \sum_{j=0}^{J} \int_{x_j}^{x_{j+1}} G(x_i, x_j) f(x_j) ds \end{aligned}$$

quand on approche l'intégrale par une somme de Riemann aux noeuds inférieurs des segments d'intégration.

7. **Erreur de convergence / erreur de troncature locale.** Avec les notations indiquées et comme $u(x)$ vérifie les conditions aux limites homogènes, on a pour tout $1 \leq i \leq J$

$$\begin{aligned} (Ae)_i &= \left[A(U - \bar{U})\right]_i = (F - A\bar{U})_i = f(x_i) - (A\bar{U})_i \\ &= -u''(x_i) - \frac{-\bar{U}_{i+1} + 2\bar{U}_i - \bar{U}_{i-1}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} - u''(x_i) \end{aligned}$$

on a donc

$$Ae = \eta$$

où $\eta \in \mathbb{R}^J$ est l'erreur de troncature locale qui vient de l'approximation par différences finies de l'opérateur différentiel et qui fait que $\bar{U}$ ne vérifie pas le schéma (5) (c'est U qui en est solution) : pour tout $1 \leq i \leq J$

$$\eta_i := \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} - u''(x_i)$$

8. **Consistance du schéma à l'ordre 2**. On suppose $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$, donc d'après le résultat de régularité $u \in \mathcal{C}^4([0, L])$, on peut donc effectuer un développement de Taylor à l'ordre 4 centré en x_i pour tout $1 \leq i \leq J$
$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \Delta x u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta x^4}{24} u^{(4)}(\tau_i^+)$$
$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - \Delta x u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta x^4}{24} u^{(4)}(\tau_i^-)$$
avec $\tau_i^+ \in [x_i, x_{i+1}]$ et $\tau_i^- \in [x_{i-1}, x_i]$. Par suite : pour tout $1 \leq i \leq J$
$$|\eta_i| = \left| \frac{\Delta x^2}{24} u^{(4)}(\tau_i^+) + \frac{\Delta x^2}{24} u^{(4)}(\tau_i^-) \right| \leq \frac{\Delta x^2}{12} \|u^{(4)}\|_{\mathcal{C}^0} = \frac{\Delta x^2}{12} \|f''\|_{\mathcal{C}^0}$$
en utilisant que $u^{(4)} = -f''$. On obtient la majoration
$$\|\eta\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq J} |\eta_i| \leq C_f \, \Delta x^2, \quad \text{avec } C_f = \frac{1}{12} \|f''\|_{\mathcal{C}^0}$$
Le schéma (5) est consistant à l'ordre 2 en espace, il est important de noter que l'ordre supplémentaire a été gagné parce que le schéma était centré en espace mais qu'il n'est atteint que si la donnée et donc la solution sont suffisamment régulières.

9. **Stabilité L^∞.** Si la donnée f est la fonction constante f_1 égale à 1 sur $[0, L]$, comme $f_1'' = 0$, d'après la question précédente
$$\|\eta\|_\infty = 0$$
et donc
$$0 = Ae = A(W - \bar{W})$$
où on a noté $w(x)$ la solution exacte associée à f_1, $W \in \mathbb{R}^J$ la solution du schéma discret obtenue avec $F1$ vecteur discret correspondant et $\bar{W} = (w(x_i))_{1 \leq i \leq J} \in \mathbb{R}^J$. Par suite $W = \bar{W} = A^{-1}F1$. Le vecteur $F1$ a toutes ses composantes égales à 1. Donc, pour tout $1 \leq i \leq J$:
$$\bar{W}_i = \sum_{j=1}^{J} A_{ij}^{-1} (F1)_i = \sum_{j=1}^{J} A_{ij}^{-1} = \sum_{j=1}^{J} |A_{ij}^{-1}|$$
car la matrice A^{-1} a tous ses termes positifs. Par définition des normes vectorielle et matricielle $\|.\|_\infty$,
$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq J} \sum_{j=1}^{J} |A_{ij}^{-1}| = \max_{1 \leq i \leq J} |\bar{W}_i| = \|\bar{W}\|_\infty$$
La solution exacte nulle aux bords de $-w''(x) = 1$ sur $]0, L[$ est $w(x) = \dfrac{x(L-x)}{2}$ qui atteint son maximum en $x = L/2$. Celui-ci vaut $L^2/8$. On obtient donc :
$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{L^2}{8}$$
Noter l'analogie avec le résultat obtenu pour le problème continu. L'inverse de A est donc bornée en norme infinie par une constante indépendante de Δx, c'est un résultat dit de stabilité L^∞

10. **Convergence L^∞.** On suppose $f \in \mathcal{C}^2([0,L])$. D'après les résultats précédents de consistance et stabilité,

$$\|e\|_\infty = \|A^{-1}\eta\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|\eta\|_\infty \leq \frac{L^2}{8} C_f \, \Delta x^2 = \frac{L^2}{96} \|f''\|_{\mathcal{C}^0} \Delta x^2.$$

Le schéma (5) converge en norme L^∞ à l'ordre 2 quand Δx tend vers 0.

11. **Convergence L^2.**

- Soit $X \in \mathbb{R}^J$, pour tout $1 \leq i \leq J$, en posant $X_0 = X_{J+1} = 0$,

$$\begin{aligned} |X_i| &= \left| X_0 + \sum_{j=1}^{i} (X_j - X_{j-1}) \right| = \sum_{j=1}^{i} \Delta x \frac{X_j - X_{j-1}}{\Delta x} * 1 =< \frac{X_j - X_{j-1}}{\Delta x}, 1 >_i \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{i} \Delta x \left| \frac{X_j - X_{j-1}}{\Delta x} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{i} \Delta x |1|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|X\|_A L^{1/2} \end{aligned}$$

  où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire noté $< .,. >_i$ qui est le produit scalaire $< . >_2$ restreint aux i premières composantes. Par suite

$$\|X\|_\infty \leq L^{1/2} \|X\|_A$$

  De plus,

$$\|X\|_2^2 = \left(\sum_{j=1}^{J} \Delta x |X_j|^2 \right) \leq \|X\|_\infty^2 \left(\sum_{j=1}^{J} \Delta x \right) \leq \|X\|_\infty^2 L$$

  On obtient donc

$$\|X\|_2 \leq \|X\|_\infty L^{1/2} \leq L \|X\|_A$$

  Noter que l'estimation $\|X\|_2 \leq L\|X\|_A$ provient du fait que $X_0 = 0$ et que $\sum_{j=1}^{i} \Delta x |1|^2$ est bornée. Le résultat précédent devient faux sinon.

- On a établi précédemment le résultat suivant, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^J$,

$$< AX, Y >_J = \sum_{i=1}^{J+1} \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta x} \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x}$$

  Donc

$$< AX, Y >_2 = \Delta x < AX, Y >_J = \Delta x \sum_{i=1}^{J+1} \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta x} \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x} =< X, Y >_A$$

  Donc

$$\|e\|_A^2 =< e, e >_A =< Ae, e >_2 =< \eta, e >_2 \leq \|\eta\|_2 \|e\|_2 \leq L \|\eta\|_2 \|e\|_A$$

  d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $< .,., >_2$ et les estimations précédentes. Donc$\|e\|_A \leq L\|\eta\|_2$ qui est un résultat de stabilité en norme L^2.

- En utilisant le résultat de consistance précédent, on a :

$$\|e\|_A \leq L\|\eta\|_2 \leq L^{3/2}\|\eta\|_\infty \leq L^{3/2}C_f\,\Delta x^2$$

et

$$\|e\|_2 \leq L\|e\|_A \leq L^{5/2}C_f\,\Delta x^2$$

Le schéma (5) converge en norme L^2 et en norme A à l'ordre 2 quand Δx tend vers 0.

Exercice 2

Equation de diffusion-chaleur

1. **Conservation de la masse (pour une équation de diffusion)** Soit $t \in]0,T[$, pour tout $s \in [0,t]$, on intègre en espace sur $[0,1]$ l'équation (6) :

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,s) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s)\right)\,dx = 0$$

soit par intégration directe en espace,

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 u(x,s)\,dx = \nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\right]_{x=0}^{x=1} = 0$$

en utilisant la 1-périodicité en espace de $u(x,t)$ et de ses dérivées. On obtient par intégration en temps sur $[0,t\,]$la conservation de la masse.

2. **Décroissance de l'énergie.** Soit $t \in]0,T[$, pour tout $s \in [0,t]$, on intègre en espace sur $[0,1]$ l'équation (6) multipliée par $u(x,s)$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\,u(x,s)\,dx - \nu\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s)\,u(x,s)\,dx = 0$$

soit par intégration par parties en espace

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_0^1 |u(x,s)|^2\,dx &= -\nu\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\right|^2\,dx + \nu\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\,u(x,s)\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= -\nu\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\right|^2\,dx \leq 0\end{aligned}$$

en utilisant la 1-périodicité en espace de $u(x,t)$ et de ses dérivées. On obtient par intégration en temps sur $[0,t]$ la décroissance de l'énergie $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx$. Plus généralement, soit $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe ($\eta"(v) \geq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}$), en intègrant en espace sur $[0,1]$ l'équation (6) multipliée par $\eta'(u(x,s))$, on obtient de même (intégration par parties et 1-périodicité de u) :

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 \eta(u(x,s))\,dx = -\nu\int_0^1 \eta"(u(x,s))\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\right|^2\,dx \leq 0$$

grâce à la convexité de η. On en déduit que :

$$\int_0^1 \eta(u(x,t))\,dx \leq \int_0^1 \eta(u^0(x))\,dx.$$

Il s'agit d'une propriété de décroissance de l'entropie $\int_0^1 \eta(u(x,t))\,dx$. Pour $\eta(v) = \frac{1}{2}v^2$, on retrouve la décroissance de l'énergie).

3. **Décomposition en série de Fourier en espace (périodicité).** Sous réserve de régularité suffisante, on dérive en temps sous le signe somme la série de Fourier (7) :
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dt}\hat{u}_k(t)\, e^{2i\pi kx}$$
et
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2i\pi k)^2 \hat{u}_k(t)\, e^{2i\pi kx}$$
Par transformée de Fourier inverse, on obtient en utilisant la décomposition en série de Fourier de u^0 suffisamment régulière notée $\hat{u}_k^0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$:
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\hat{u}_k(t) + 4\pi^2 k^2 \nu \hat{u}_k(t) = 0 \quad \forall t \in]0,T[, \\ \hat{u}_k(0) = \hat{u}_k^0 \end{array} \right.$$
Par suite
$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k^0\, e^{-4\pi^2 k^2 \nu t}$$
La décroissance est d'autant plus rapide que k est grand, c'est l'effet régularisant de l'équation de la chaleur.

4. **Discrétisation par un θ-schéma en temps.** Le schéma (8) s'écrit pour tout $0 \le n \le N-1$
$$(I + \theta\, Co_d\, B)\, U^{n+1} = (I - (1-\theta)\, Co_d\, B)\, U^{n+1}$$
avec
$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
On note $< .,. >_2$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ associée à la norme sur $\mathbb{R}^J$, définie pour tout $X \in \mathbb{R}^J$ par $\|X\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{J} \Delta x |X_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. On considère$X$ et Y deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^J$ et on leur associe les conditions de 1-périodicité $X_0 = X_J$, $X_{J+1} = X_1$, $Y_0 = Y_J$, $Y_{J+1} = Y_1$, alors en effectuant une intégration par parties discrètes
$$\begin{aligned} < BX, Y >_2 &= \Delta x \sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J} B_{ij} X_j Y_i = \Delta x \sum_{i=1}^{J} (-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1}) Y_i \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_i - X_{i+1}) Y_i + \Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_i - X_{i-1}) Y_i \\ &= \Delta x \sum_{i=0}^{J-1} (X_i - X_{i+1}) Y_i + \Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_i - X_{i-1}) Y_i \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_{i-1} - X_i) Y_{i-1} + \Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_i - X_{i-1}) Y_i \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1}) \\ &= < X, BY >_2 \end{aligned}$$

On a en particulier pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^J$

$$< BX, X >_2 = \Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_i - X_{i-1})^2 \geq 0$$

La matrice B est symétrique positive mais elle n'est pas définie : si $< BX, X >_2 = 0$ alors pour tout $1 \leq i \leq J$, $X_0 = X_1 = \cdots = X_{i-1} = X_i = \cdots = X_J$, tout vecteur constant est dans le noyau de B. La somme des lignes ou des colonnes étant nulle, on retrouve que la matrice B ne peut être inversible et a pour noyau $\mathrm{Vect}(1 \cdots 1)$. Remarquons que $-u"(x) = 0$ sur $]0, 1[$ avec condition de 1-périodicité $u(0) = u(1)$ a pour solution l'ensemble des constantes. Par suite $I + \theta Co_d B$ est symétrique définie positive et donc inversible ce qui justifie l'existence de son inverse B_I^θ.

5. **Erreur de convergence / erreur de troncature.** Pour tout $0 \leq n \leq N - 1$, on définit $\eta^n \in \mathbb{R}^J$ par
$$\Delta t \eta^n := (B_I^\theta)^{-1} \bar{U}^{n+1} - B_E^\theta \bar{U}^n.$$
La relation entre e^{n+1}, e^n et η^n est immédiate. Pour tout $1 \leq j \leq J$,
$$\eta_j^n = \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} - \theta\nu \frac{\bar{U}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{U}_j^{n+1} + \bar{U}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1-\theta)\nu \frac{\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

6. **Consistance.** On suppose $u(x, t)$ suffisamment régulière pour effectuer les développements de Taylor.
$$\frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} = \theta \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \tilde{U}_j^n}{\Delta t} + (1-\theta) \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t}$$
On effectue respectivement pour chacun des deux termes un développement de Taylor à l'ordre 3 en temps en t^{n+1} respectivement t^n, il vient :
$$\theta \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} = \theta \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^{n+1}) \right] + O(\Delta t^2)$$
et
$$(1-\theta) \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} = (1-\theta) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) \right] + O(\Delta t^2)$$
En effectuant le développement à l'ordre 4 en espace des 2 autres termes intervenant dans η_j^n il vient :
$$-\theta\nu \frac{\bar{U}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{U}_j^{n+1} + \bar{U}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = -\theta\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^{n+1}) + O(\Delta x^2)$$
et
$$-(1-\theta)\nu \frac{\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n}{\Delta x^2} = -(1-\theta)\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2)$$

En regroupant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\eta_j^n &= \theta\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^{n+1}) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^{n+1})\right] + (1-\theta)\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^{n}) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^{n})\right] \\
&\quad -\theta\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1}) + (1-\theta)\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n}) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \\
&= -\theta\left[\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1/2}) + O(\Delta t)\right] + (1-\theta)\left[\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1/2}) + O(\Delta t)\right] \\
&\quad + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \\
&= (1-2\theta)\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1/2}) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

où on a noté $t^{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$. Le schéma (8) est donc consistant au moins à l'ordre 1 en temps et 2 en espace. Dans le cas où $\theta = 1/2$ il est d'ordre 2 en temps, ce schéma est appelé schéma de Crank-Nicolson. L'ordre maximal est obtenu si u est de classe $\mathcal{C}^4$ en espace et de classe $\mathcal{C}^2$ en temps pour $\theta \neq 1/2$ et de classe $\mathcal{C}^3$ en temps pour $\theta = 1/2$.

7. **Stabilité L^2 du θ-schéma par analyse de Fourier.** Rappellons le principe de l'étude de la stabilité L^2 par analyse de Fourier

(a) Pour tout $0 \le n \le N-1$, on introduit la fonction $\tilde{u}^n(x)$, 1-périodique, constante par morceaux telle que pour tout $1 \le j \le J$:

$$\tilde{u}^n(x) = U_j^n \qquad \forall x \in]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$$

(b) On décompose la fonction $\tilde{u}^n(x)$ en série de Fourier, $\forall x \in [0,1]$

$$\tilde{u}^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k^n\, e^{2i\pi kx}$$

avec $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{u}_k^n = \int_0^1 \tilde{u}^n(x)\, e^{-2i\pi kx} dx$$

(c) On utilise la formule de Plancherel qui relie le produit scalaire dans $L^2(]0,1[)$ au produit scalaire dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des coefficients de la série de Fourier

$$\int_0^1 u(x)\,\overline{v(x)}dx = \sum_{k\in Z} \hat{u}_k \overline{\widehat{v_k}}$$

pour obtenir les relations entre norme $\|.\|_2$ dans $\mathbb{R}^J$ et norme L^2 dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (on a le même résultat pour les produits scalaires associés).

$$\begin{aligned}
\|U^n\|_2^2 &= \sum_{j=1}^J \Delta x |U_j^n|^2 = \sum_{j=1}^J \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} |U_j^n|^2\, dx \\
&= \sum_{j=1}^J \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} |\tilde{u}^n(x)|^2\, dx = \|\tilde{u}^n\|^2_{L^2(]0,1[)} = \sum_{k\in Z} |\hat{u}_k^n|^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé la 1-périodicité de $\tilde{u}^n$.

(d) On déduit du schéma aux différences finies une relation de la forme $\hat{u}_k^{n+1} = A_k\,\hat{u}_k^n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour cela on utilise le fait que la transformation en série de Fourier transforme un opérateur de translation en multiplication par un complexe : soit v une fonction 1-périodique et δ un réel, on note $v(.+\delta)$ la fonction translatée de δ, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{v(.+\delta)}_k &= \int_0^1 v(x+\delta)\,e^{-2i\pi kx}dx = \int_\delta^{1+\delta} v(y)\,e^{-2i\pi k(y-\delta)}dy \\
&= e^{+2i\pi k\delta}\int_\delta^{1+\delta} v(y)\,e^{-2i\pi ky}dy = e^{+2i\pi k\delta}\int_0^1 v(y)\,e^{-2i\pi ky}dy \\
&= e^{+2i\pi k\delta}\hat{v}_k
\end{aligned}$$

On établit alors la condition pour laquelle $|A_k| \leq 1$ pour tout mode $k \in \mathbb{Z}$ dite condition de stabilité de Von Neumann.

(e) Sous cette condition, on déduit que pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\|U^n\|_2 = \left(\sum_{k\in Z} |\hat{u}_k^n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k\in Z} |\hat{u}_k^0|^2\right)^{1/2} = \|U^0\|_2$$

qui assure la stabilité L^2 du schéma.

Le θ-schéma (8) se réécrit sous la forme, pour tout $x \in [0,1]$:

$$U^{n+1} = B_I^\theta\,B_E^\theta\,U^n = A^\theta U^n,$$

soit

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{u}^{n+1}(x) - \tilde{u}^n(x)}{\Delta t} &- \theta\nu\frac{\tilde{u}^{n+1}(x+\Delta x) - 2\tilde{u}^{n+1}(x) + \tilde{u}^{n+1}(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \\
&- (1-\theta)\nu\frac{\tilde{u}^n(x+\Delta x) - 2\tilde{u}^n(x) + \tilde{u}^n(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = 0.
\end{aligned}$$

En observant que

$$e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x} = 2(\cos(2\pi k\Delta x) - 1) = -4\sin^2(\pi k\Delta x)$$

il vient par transformation en série de Fourier pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(1 + 4\theta Co_d\sin^2(\pi k\Delta x))\hat{u}_k^{n+1} = (1 - 4(1-\theta)Co_d\sin^2(\pi k\Delta x))\hat{u}_k^n.$$

D'où comme $1+4\theta Co_d\sin^2(\pi k\Delta x) \geq 1$ (ce qui remontre que la matrice B_I^θ est inversible) ,

$$A_k^\theta = 1 - \frac{4Co_d\sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + 4\theta Co_d\sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 1$$

La condition de stabilité de Von Neumann s'écrit donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $A_k^\theta \geq -1$, soit

$$\frac{4Co_d\sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + 4\theta Co_d\sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 2$$

ou encore

$$2Co_d(1-2\theta)\sin^2(\pi k\Delta x) \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sous la condition $2Co_d(1-2\theta) \leq 1$, le critère est vérifié pour tout k. Si $1-2\theta \leq 0$, la stabilité est inconditionnelle. Si $1-2\theta > 0$, on a stabilité sous la condition

$$Co_d \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$$

soit en utilisant les pas de temps et d'espace

$$\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \qquad \text{si } \theta < \frac{1}{2}$$

Quand $\Delta x \to 0$, on a $\sin^2(\pi k \Delta x) \simeq \pi^2 k^2 \Delta x^2 = \pi^2 k^2 \nu \Delta t / Co_d$, et donc $A_k^\theta \to A_k^{\theta,0}$ avec

$$A_k^{\theta,0} = 1 - \frac{4\pi^2 k^2 \nu \Delta t}{1 + 4\theta \pi^2 k^2 \nu \Delta t}$$

En réécrivant $\hat{u}_k^{n+1} = A_k^{\theta,0} \hat{u}_k^n$, on obtient le schéma :

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n}{\Delta t} + 4\theta \pi^2 k^2 \nu \hat{u}_k^{n+1} + 4(1-\theta)\pi^2 k^2 \nu \hat{u}_k^n = 0$$

qui n'est autre que la discrétisation par un θ-schéma en temps de l'équation différentielle vérifiée par les fonctions $\hat{u}_k(t)$ coefficients de Fourier de la solution exacte. La condition de stabilité sur $A_k^{\theta,0}$ est comme $A_k^{\theta,0} \leq 1$ est toujours vérifiée,

$$4\pi^2 k^2 \nu \Delta t (1-2\theta) \leq 2$$

En notant $a_k = 4\pi^2 k^2 \nu$, on étend les résultats obtenus au TD précédent pour les schémas Euler implicite et explicite à tous les θ-schémas d'Euler : Si $1-2\theta \leq 0$, il y a stabilité inconditionnnelle (en particulier pour $\theta = 1$ Euler implicite) , si $1-2\theta > 0$, on a stabilité sous la condition :

$$\Delta t \leq \frac{2}{a_k(1-2\theta)}$$

(en particulier on retrouve $\Delta t \leq \dfrac{2}{\|A\|}$ pour $\theta = 0$ Euler explicite).

8. **Convergence en norme L^2.** On regroupe les résultats de consistance et de stabilité. On a par récurrence immédiate, e^0 étant nul, d'après (9), pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$e^{n+1} = -\Delta t \sum_{k=0}^{n} \left[B_I^\theta \, B_E^\theta \right]^{n-k} (B_I^\theta) \eta^k$$

Donc pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\|e^n\|_2 \leq \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|A^\theta\|_2^{n-1-k} \|B_I^\theta\|_2 \|\eta^k\|_2$$

Nous avons montré à la question précédente que $\|A^\theta\|_2 \leq 1$ (sous condition CFL si $\theta < 1/2$). De plus $\|B_I^\theta\|_2 \leq 1$, en effet si $Y = B_I^\theta X$, il vient $(I + \theta Co_d B)Y = X$ et donc par positivité de B

$$\|Y\|_2^2 = < Y, Y > \leq < Y, Y > + < \theta Co_d BY, Y > = < X, Y > \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$$

soit $\|Y\|_2 = \|B^\theta X\|_2 \leq \|X\|_2$. On peut aussi démontrer ce résultat par transformée de Fourier : l'opérateur B_I^θ devient le facteur multiplicatif pour chaque mode $k \in \mathbb{Z}$:

$$(B_I^\theta)_k = \frac{1}{1 + 4\theta Co_d \sin^2(\pi k \Delta x)} \leq 1$$

Enfin on utilise le résultat de consistance : pour tout $0 \leq k \leq n-1$

$$\|\eta^k\|_2 = \left(\sum_{j=1}^J \Delta x |\eta_j^k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_u(\Delta t^\alpha + \Delta x^2)$$

avec $\alpha = 1$ si $\theta \neq 1/2$, $\alpha = 2$ sinon. On obtient le résultat de convergence, pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\|e^n\|_2 \leq TC_u(\Delta t^\alpha + \Delta x^2)$$

sous la condition $2(1-2\theta)\nu\Delta t \leq \Delta x^2$ si $\theta < 1/2$ et pour tout Δt si $\theta \geq 1/2$.
Considérons maintenant la fonction 1-périodique $\tilde{u}^n$. On a pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 \tilde{u}^{n+1}(x)\, dx = \sum_{j=1}^J \Delta x U_j^{n+1}$$

Pour tout vecteur $X = (X_j)_{1 \leq j \leq J} \in \mathbb{R}^J$ prolongé par périodicité $X_0 = X_J$ et $X_{J+1} = X_1$, on a

$$\sum_{j=1}^J \Delta x (X_{j+1} - 2X_j + X_{j-1}) =< BX, 1 >_2 =< X, B1 >_2 = 0$$

où 1 est le vecteur de composantes constantes égales à 1. On en déduit que la solution du θ-schéma vérifie :

$$\sum_{j=1}^J \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = 0.$$

On en déduit la conservation de la masse discrète : pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\, dx = \int_0^1 \tilde{u}^0(x)\, dx = \sum_{j=1}^J \Delta x u^0(x_j)$$

C'est l'équivalent discret du résultat de la question 1, où on a approché $\int_0^1 u^0(x)\, dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille.
Par ailleurs, pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 |\tilde{u}^{n+1}(x)|^2\, dx = \|U^{n+1}\|_2^2$$

et donc par stabilité en norme L^2 du schéma, pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\, dx \leq \|U^0\|_2^2 = \sum_{j=1}^J \Delta x |u^0(x_j)|^2$$

C'est l'équivalent discret du résultat de la question 2, où on a approché $\int_0^1 |u^0(x)|^2\, dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille. De plus comme il existe des nombres d'onde pour lesquels $|A_k^\theta| < 1$ cette décroissance est stricte.

9. **Stabilité L^2 par méthode énergétique** Nous considérons une approche alternative de la stabilité L^2 qui est utilisée dans des cas plus généraux que l'analyse par Fourier (coefficients non constants par exemple). Il est immédiat que le schéma (8) se réécrit pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$U^{n+1} - U^n + Co_d \, B \, U^{n+\theta} = 0$$

En prenant le produit scalaire $< .,. >$ de l'expression précédente par $U^{n+\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= < U^{n+1} - U^n, U^{n+\theta} >_2 + Co_d \; < BU^{n+\theta}, U^{n+\theta} >_2 \\ &= \frac{1}{2}(\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2 + (2\theta - 1)\|U^{n+1} - U^n\|_2^2) + Co_d \; < BU^{n+\theta}, U^{n+\theta} >_2 \end{aligned}$$

où on a écrit $U^{n+\theta} = (U^{n+1} + U^n)/2 + (\theta - 1/2)\,(U^{n+1} - U^n)$. Par suite en utilisant que $U^{n+1} - U^n = -Co_d \, B \, U^{n+\theta}$, on a :

$$\frac{1}{2}\left[\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2\right] = -Co_d \left[< BU^{n+\theta}, U^{n+\theta} >_2 - \frac{(1-2\theta)\, Co_d}{2}\|B\, U^{n+\theta}\|_2^2\right]$$

Si $1 - 2\theta \leq 0$, on a inconditionnellement $\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2 \leq 0$ et donc la stabilité L^2 du schéma.
Si $1 - 2\theta > 0$, la stabilité est obtenue si pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$< BU^{n+\theta}, U^{n+\theta} >_2 - \frac{(1-2\theta)\, Co_d}{2}\|B\, U^{n+\theta}\|_2^2 \geq 0$$

En écartant le cas trivial où $J = 1$ et B la matrice nulle, on a stabilité si $\frac{(1-2\theta)\, Co_d}{2}\|B\, X\|_2^2$ est inférieur à $< BX, X >_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^J$. La matrice B étant symétrique positive et donc diagonalisable en base orthonormée avec des valeurs propres $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$, on a

$$\lambda_m = \sup_{X \in \mathbb{R}^J - \{0\}} \frac{\|BX\|_2}{\|X\|_2} = \|B\|_2$$

mais aussi

$$\lambda_m = \sup_{X \in \mathbb{R}^J - \{0\}} \frac{< BX, X >_2}{\|X\|_2^2}$$

et

$$\lambda_m = \sup_{X \in \mathbb{R}^J - \{0\}} \frac{\|BX\|_2^2}{< BX, X >_2}$$

La deuxième expression permet d'estimer $\|B\|_2$:

$$< BX, X >_2 = \Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_i - X_{i-1})^2 \leq 2\Delta x \sum_{i=1}^{J} (X_i^2 + X_{i-1}^2) = 4\|X\|_2^2$$

par périodicité et en utilisant l'inégalité $(a-b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. (On pourra vérifier que si J est pair $\|B\|_2 = 4$, et si J est impair, $4(1 - \Delta x) \leq \|B\|_2 \leq 4$).
La condition de stabilité s'écrit donc :

$$4\frac{(1-2\theta)\, Co_d}{2} \leq 1$$

soit

$$Co_d \leq \frac{1}{2\,(1-2\theta)}$$

On retrouve les résultats précédents.

Exercice 3

Equation d'advection

1. **Résultats de conservation : cas continu.** Soit $t \in]0,T[$, pour tout $s \in [0,t]$, on intègre en espace sur $[0,1]$ l'équation (10) :

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,s) + V\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\right) dx = 0$$

soit par intégration directe en espace,

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 u(x,s)\,dx = -V\,[u(x,s)]_{x=0}^{x=1} = 0$$

en utilisant la 1-périodicité en espace de $u(x,t)$. On obtient par intégration en temps sur $[0,t]$ la conservation de la masse. Par ailleurs, on intègre en espace sur $[0,1]$ l'équation (10) multipliée par $u(x,s)$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\,u(x,s)\,dx + V\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\,u(x,s)\,dx = 0$$

soit par intégration directe en espace

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_0^1 |u(x,s)|^2\,dx &= -V\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u(x,s)^2)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}V\left[u(x,s)^2\right]_{x=0}^{x=1} = 0 \end{aligned}$$

en utilisant la 1-périodicité en espace de $u(x,t)$. On obtient par intégration en temps sur $[0,t]$ la conservation de l'énergie $\int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx$. L'équation de la chaleur et l'équation d'advection conservent toutes les 2 la masse. En revanche, la décroissance de l'énergie dans le cas de l'équation de la chaleur est due à la présence du terme de diffusion $-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et n'est pas partagée par le phénomène d'advection qui transporte l'énergie sans dissipation.

2. **Schéma centré explicite.**

(a) **Consistance.** Pour tout $0 \le n \le N-1$, on définit l'erreur de troncature par $\eta^n = (\eta_j^n)_{1\le j\le J} \in R^J$: pour tout $1 \le j \le J$

$$\eta_j^n = \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} + V\frac{\bar{U}_{j+1}^n - \bar{U}_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

Sous l'hypothèse $u^0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, la solution exacte de (10) $u \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}\times[0,T])$, on peut donc effectuer des développements de Taylor à l'ordre 2 en temps et 3 en espace. On obtient

$$\frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + O(\Delta t)$$

et

$$\frac{u(x_{j+1},t^n) - u(x_{j-1},t^n)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) + O(\Delta x^2).$$

D'où la conclusion.

(b) **Stabilité** On utiise comme prédédemment l'analyse de stabilité par décomposition en série de Fourier. En observant que

$$e^{2i\pi k\Delta x} - e^{-2i\pi k\Delta x} = 2i\,\sin(2\pi k\Delta x),$$

il vient par transformation en série de Fourier, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{u}_k^{n+1} = (1 - i\,Co_a \sin(2\pi k\Delta x))\hat{u}_k^n = A_k\,\hat{u}_k^n.$$

On a :

$$|A_k|^2 = 1 + Co_a^2 \sin^2(2\pi k\Delta x) \geq 1 \quad \text{ et } \quad |A_k| = 1 \text{ ssi } 2k\Delta x = \frac{2k}{J} \in \mathbb{Z}$$

On en déduit que dès que $J \geq 3$ il existe des modes $k \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $|A_k| > 1$ ce qui rend le schéma centré explicite (11) inconditionnellement instable en norme L^2. Par méthode énergétique on peut prouver aisément que

$$\|U^n\|_2^2 =< U^{n+1}, U^n >_2 \leq \|U^{n+1}\|_2 \|U^n\|_2$$

et donc qu'il y a croissance de l'énergie discrète au cours du temps. Il reste à montrer que l'inégalité dans la majoration de Cauchy-Schwarz peut être stricte en uilisant justement comme donnée initiale la représentation spatiale d'un mode de Fourier tel que $|A_k| > 1$. Les deux démonstrations reposent bien sur le même argument.

3. **Schéma décentré amont.** .

(a) **Consistance.** Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on définit l'erreur de troncature par $\eta^n = (\eta_j^n)_{1\leq j\leq J} \in R^J$: pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\eta_j^n = \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} + V\frac{\bar{U}_j^n - \bar{U}_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Sous l'hypothèse $u^0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, la solution exacte de (10) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0,T])$, on peut donc effectuer des développements de Taylor à l'ordre 2 en temps et 2 en espace. On obtient

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O(\Delta t)$$

et

$$\frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x).$$

D'où la conclusion.

(b) **Stabilité L^∞.** On écrit le schéma (12) sous la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - Co_a\,U_j^n + Co_a\,U_{j-1}^n = (1 - Co_a)\,U_j^n + Co_a\,U_{j-1}^n$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$. Donc, pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\begin{aligned} |U_j^{n+1}| \leq |1 - Co_a|\,|U_j^n| + |Co_a|\,|U_{j-1}^n| &\leq (|1 - Co_a| + |Co_a|) \max_{1\leq j\leq J} |U_j^n| \\ &= (|1 - Co_a| + |Co_a|)\|U^n\|_\infty \end{aligned}$$

Sous la condition $0 \leq Co_a \leq 1$, on a pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\|U^{n+1}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq J} |U_j^{n+1}| \leq (\,(1 - Co_a) + Co_a)\|U^n\|_\infty = \|U^n\|_\infty$$

(c) **Convergence** L^∞. En introduisant les vecteurs erreurs $e^n = U^n - \bar{U^n}$ pour tout $0 \le n \le N-1$, on a la relation entre erreur de convergence et erreur de consistance :

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\Delta t} + V\frac{e_j^n - e_{j-1}^n}{\Delta x} = -\eta_j^n$$

pour tout $1 \le j \le J$. Le résultat de stabilité précédent nous donne :

$$\|e^{n+1}\|_\infty \le \|e^n\|_\infty + \Delta t \|\eta^n\|_\infty$$

. Par suite et comme $e^0 = 0$, pour tout $1 \le n \le N$

$$\|e^n\|_\infty \le \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \|\eta^k\|_\infty \le TC_u(\,O(\Delta t) + \,O(\Delta x),)$$

avec C_u une constante ne dépendant que de la solution exacte u sous l'hypothèse de réfgularité $u^0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ d'après le résulatt de consistance précédent.

(d) **Convergence** L^2**.** La convergence en norme L^∞ implique la convergence en norme L^2. On peut établir directement cette convergence par analyse de Fourier. En observant que

$$1 - e^{-2i\pi k\Delta x} = e^{-i\pi k\Delta x} 2i\,\sin(\pi k\Delta x),$$

il vient par transformation en série de Fourier, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{u}_k^{n+1} = \Big[1 - 2\,Co_a \sin^2(\pi k\Delta x) - 2i\,Co_a \cos(\pi k\Delta x)\sin(\pi k\Delta x)\Big]\;\hat{u}_k^n = A_k\,\hat{u}_k^n.$$

On a :

$$\begin{aligned}
|A_k|^2 &= (1 - 2\,Co_a \sin^2(\pi k\Delta x))^2 + 4\,Co_a^2 \cos^2(\pi k\Delta x)\sin^2(\pi k\Delta x)\\
&= 1 - 4\,Co_a \sin^2(\pi k\Delta x) + 4\,Co_a^2 \sin^2(\pi k\Delta x)\\
&= 1 - 4\,Co_a\,(1 - Co_a)\,\sin^2(\pi k\Delta x)
\end{aligned}$$

La condition de stabilité $|A_k| \le 1$ est réalisée pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si $Co_a\,(1 - Co_a) \ge 0$ soit $0 \le Co_a \le 1$.

$$0 \le \frac{V\Delta t}{\Delta x} \le 1$$

Remarquez que si V est négatif (et donc Co_a), le schéma décentré amont devient instable, il faut dans ce cas là utiliser

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + V\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0$$

qui est bien décentré vis à vis de l'amont de l'écoulement.

(e) **Diffusion numérique**. On observe que

$$V\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = V\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V\Delta x}{2}\right)\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2},$$

ce qui fait intervenir un terme de diffusion numérique de valeur $\frac{V\Delta x}{2}$. C'est ce terme qui permet d'assurer la stabilité vis à vis du schéma centré explicite.

(f) **Résultats de conservation : cas discret.** Considérons maintenant la fonction 1-périodique $\tilde{u}^n$. On a pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tilde{u}^{n+1}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x U_j^{n+1} &= \sum_{j=1}^{J} (1 - Co_a)\, U_j^n + Co_a\, U_{j-1}^n \\
&= \sum_{j=1}^{J} U_j^n = \int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx
\end{aligned}$$

en utilisant la 1-périodicité de $\tilde{u}^n$. On en déduit la conservation de la masse discrète : pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{u}^0(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x u^0(x_j).$$

C'est l'équivalent discret du résultat de la question 1, où on a approché $\displaystyle\int_0^1 u^0(x)\,dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille. Par ailleurs, pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 |\tilde{u}^{n+1}(x)|^2\,dx = \|U^{n+1}\|_2^2$$

et donc par stabilité en norme L^2 du schéma sous la condition $0 \leq Co_a \leq 1$, pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx \leq \|U^0\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{J} \Delta x |u^0(x_j)|^2$$

On obtient au niveau discret une propriété de décroissance et non de conservation de l'énergie où on a approché $\displaystyle\int_0^1 |u^0(x)|^2\,dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille. Comme il existe des nombres d'onde pour lesquels $|A_k| < 1$ cette décroissance est stricte (sauf cas particuliers comme $Co_a = 1$).

4. **Schéma de Lax-Wendroff.**

(a) **Consistance.** Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on définit l'erreur de troncature par $\eta^n = (\eta_j^n)_{1 \leq j \leq J} \in R^J$: pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\eta_j^n = \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} + V \frac{\bar{U}_{j+1}^n - \bar{U}_{j-1}^n}{2\Delta x} - \left(\frac{V^2 \Delta t}{2}\right) \frac{\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Sous l'hypothèse $u^0 \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$, la solution exacte de (10) $u \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R} \times [0,T])$, on peut donc effectuer des développements de Taylor à l'ordre 3 en temps et 3 ou 4 en espace. On obtient pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$:

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O(\Delta t^2),$$

$$\frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2)$$

et

$$\frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2)$$

En regroupant, il vient, pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$:

$$\eta_j^n = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_j, t^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2).$$

En utilisant le théorème de Schwarz, il vient si la solution exacte est suffisamment régulière :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-V\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -V\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

D'où la conclusion.

(b) **Stabilité** L^2.On utiise comme prédédemment l'analyse de stabilité par décomposition en série de Fourier. Pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$\begin{aligned}\hat{u}_k^{n+1} &= \left[1 - i\,Co_a\sin(2\pi k\Delta x) + \frac{Co_a^2}{2}(-4\sin^2(\pi k\Delta x))\right]\hat{u}_k^n \\ &= \left[1 - 2Co_a^2\sin^2(\pi k\Delta x) - 2i\,Co_a\sin(\pi k\Delta x)\cos(\pi k\Delta x)\right]\hat{u}_k^n \\ &= A_k\,\hat{u}_k^n\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}|A_k|^2 &= (1 - 2\,Co_a^2\sin^2(\pi k\Delta x))^2 + 4\,Co_a^2\cos^2(\pi k\Delta x)\sin^2(\pi k\Delta x) \\ &= 1 - 4\,Co_a^2\sin^2(\pi k\Delta x)(1 - cos^2(\pi k\Delta x)) + 4\,Co_a^4\sin^4(\pi k\Delta x) \\ &= 1 - 4\,Co_a^2\,(1 - Co_a^2)\,\sin^4(\pi k\Delta x)\end{aligned}$$

La condition de stabilité $|A_k| \leq 1$ est réalisée pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si $Co_a^2\,(1 - Co_a^2) \geq 0$ soit $0 \leq Co_a \leq 1$. Le schéma (13) est stable en norme L^2 sous la condition CFL

$$Co_a^2 \leq 1.$$

Remarquer que la condition de stabilité s'étend au cas $V < 0$, le terme de diffusion stabilise le schéma centré explicite quel que soit le sens de l'écoulement.

(c) **Convergence** L^2. En introduisant les vecteurs erreurs de convergence $e^n = U^n - \bar{U}^n$ et en les reliant à l'erreur de consistance η^n, on démontre sans problème la convergence du schéma de Lax-Wendroff (13) en norme L^2 et à l'ordre 2 en temps et en espace. (Cf théorème de Lax : stabilité + consistance implique convergence).

(d) **Stabilité** L^∞ **?** Soit $k \in \{1, \cdots, J-1\}$ un indice fixé. On considère $V^{(k)} \in \mathbb{R}^J$ telle que si $k \in \{1, \cdots, J-1\}$ est un indice fixé, $V_j^{(k)} = 1$ si $1 \leq j \leq k$, $V_j^{(k)} = 0$ sinon, pour tout $1 \leq j \leq J$. Considérons $U^0 = V^{(k)}$ comme donnée initiale du schéma de démarrage, on obtient alors pour U^1 à l'indice k :

$$U_k^1 = U_k^0 - Co_a\frac{-U_{k-1}^0}{2} + Co_a^2\frac{-2U_k^0 + U_{k-1}^0}{2} = 1 + \frac{Co_a}{2}(1 - Co_a).$$

Si $0 < Co_a < 1$, alors $\|U^1\|_\infty > 1$ et $\|U^0\|_\infty = \|V^{(k)}\|_\infty = 1$. Le schéma n'est donc pas stable en norme L^∞ sous la condition CFL. Les cas $Co_a = 0$ et $Co_a = 1$ sont stables en norme L^∞, il est facile de vérifier que pour $Co_a = 0$ on a $U^{n+1} = U^n$ pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour $Co_a = 1$, $\tilde{u}^{n+1}(x) = \tilde{u}^n(x - \Delta x) = \tilde{u}^n(x - V\Delta t) = \tilde{u}^0(x - V(n+1)\Delta t)$ et par suite le schéma est exact donc convergent pour toutes les normes.

(e) **Résultats de conservation : cas discret.** Considérons maintenant la fonction 1-périodique $\tilde{u}^n$. On a pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 \tilde{u}^{n+1}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x U_j^{n+1}$$

Le schéma fait apparaître 2 termes, un terme d'advection et un terme de diffusion. Pour le terme d'advection, on a pour tout vecteur $X = (X_j)_{1\leq j\leq J} \in \mathbb{R}^J$ prolongé par périodicité $X_0 = X_J$ et $X_{J+1} = X_1$,

$$\sum_{j=1}^{J} \Delta x (X_{j+1} - X_{j-1}) = 0$$

par périodicité de $\tilde{u}$.
Pour le terme de diffusion, on a

$$\sum_{j=1}^{J} \Delta x (X_{j+1} - 2X_j + X_{j-1}) =< BX, 1 >_2 =< X, B1 >_2 = 0$$

où 1 est le vecteur de composantes constantes égales à 1 et B la matrice introduite pour l'équation de la chaleur et correspondant au terme de diffusion. On en déduit que la solution $\tilde{u}$ du schéma de Lax-Wendroff vérifie :

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = 0.$$

On en déduit la conservation de la masse discrète : pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{u}^0(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x u^0(x_j)$$

Par ailleurs, pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 |\tilde{u}^{n+1}(x)|^2\,dx = \|U^{n+1}\|_2^2$$

et donc par stabilité en norme L^2 du schéma, pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\,dx \leq \|U^0\|_2^2 = \sum_{j=1}^{J} \Delta x |u^0(x_j)|^2$$

On a donc une propriété de décroissance de l'énergie et elle est stricte si $0 < Co_a < 1$, contrairement au cas continu où l'énergie se conserve.