Analyse numérique et optimisation

TD n°2 I. Terrasse

Différences Finies en temps et en espace : équation de diffusion.

Exercice 1

Equation de diffusion-chaleur : étude théorique

Soient T un réel strictement positif, $\nu > 0$ un coefficient de diffusion (unité : m^2/s) et $u^0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction donnée 1-périodique. On s'intéresse à l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ 1-périodique telle que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[, \\ u(x, 0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

On admet que le problème (5) admet une et une seule solution régulière bornée.

1. **Conservation de la masse (pour une équation de diffusion)** Montrer que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_0^1 u(x, t) dx = \int_0^1 u^0(x) dx$$

2. **Décroissance de l'énergie.** Montrer que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |u^0(x)|^2 dx$$

3. **Décomposition en série de Fourier en espace (périodicité).** Pour tout $t \in [0, T]$, on décompose la solution $u(\cdot, t)$ selon sa série de Fourier :

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(t) e^{2i\pi kx}. \quad (2)$$

Déterminer l'équation différentielle en temps vérifiée par les fonctions $\hat{u}_k(t)$ (on procédera formellement en supposant que la régularité de la solution $u(\cdot, t)$ est suffisante pour justifier ces manipulations).

4. **Discrétisation par un θ -schéma en temps.** Soit $\theta \in [0, 1]$ un paramètre réel. On considère un entier $N > 0$ et le pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$. On introduit pour tout $0 \leq n \leq N$, $t^n = n\Delta t$ l'instant discret. On considère par ailleurs un entier $J > 0$ et le pas d'espace $\Delta x = \frac{1}{J}$. On introduit les points discrets $x_j = j\Delta x$ pour tout $-1 \leq j \leq J+1$ et on étendra cette notation à $j \in \mathbb{Q}$. On considère l'approximation par différences finies de l'équation de la chaleur par le θ -schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \theta \nu \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1 - \theta) \nu \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (3)$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et pour tout $1 \leq j \leq J$. On ajoute les conditions de 1-périodicité :

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \quad U_0^n = U_J^n \quad \text{et} \quad U_{J+1}^n = U_1^n$$

et la condition initiale de démarrage en $n = 0$

$$\forall 1 \leq j \leq J, \quad U_j^0 = u^0(x_j).$$

On introduit le nombre adimensionnel (appelé nombre de Courant diffusif)

$$Co_d = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$$

Pour tout $0 \leq n \leq N$, on introduit le vecteur $U^n = (U_i^n)_{1 \leq i \leq J} \in \mathbb{R}^J$. Ecrire le θ -schéma (6) sous la forme matricielle pour tout $0 \leq n \leq N - 1$

$$(B_I^\theta)^{-1} U^{n+1} = B_E^\theta U^n$$

avec

$$B_I^\theta = (I + \theta Co_d B)^{-1} \quad B_E^\theta = I - (1 - \theta) Co_d B$$

avec I matrice d'identité d'ordre J et B une matrice carrée d'ordre J que l'on explicitera. A quoi correspondent B_I^θ et B_E^θ quand θ vaut 0 et 1 ? Justifier l'existence de la matrice B_I^θ .

5. **Erreur de convergence / erreur de troncature.** Pour tout $0 \leq n \leq N - 1$, on introduit le vecteur erreur $e^n \in \mathbb{R}^J$ de composantes $e_j^n = U_j^n - \bar{U}_j^n$ pour tout $1 \leq j \leq J$ où $\bar{U}^n = (\bar{U}_i^n)_{1 \leq i \leq J} = (u(x_i, t^n))_{1 \leq i \leq J} \in \mathbb{R}^J$ est le vecteur de composantes la valeur de la solution exacte u du problème (5) aux points discrets en espace et au temps t^n . Par 1-périodicité, on a $e_0^n = e_J^n$ et $e_{J+1}^n = e_1^n$ pour tout $0 \leq n \leq N - 1$ et par la condition initiale $e_j^0 = 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$. Montrer que, pour tout $0 \leq n \leq N - 1$,

$$(B_I^\theta)^{-1} e^{n+1} = B_E^\theta e^n - \Delta t \eta^n \tag{4}$$

en précisant les composantes du vecteur des erreurs de troncature $\eta^n \in \mathbb{R}^J$.

6. **Consistance.** Montrer que le θ -schéma est consistant et d'ordre au moins un en temps et deux en espace. Préciser la régularité demandée sur la solution exacte. Que se passe-t-il si $\theta = 1/2$.
7. **Stabilité L^2 du θ -schéma par analyse de Fourier.** On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ associée à la norme L^2 sur $\mathbb{R}^J$, définie pour tout $X \in \mathbb{R}^J$ par $\|X\|_2 = \left(\sum_{j=1}^J \Delta x |X_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Montrer en utilisant la décomposition en série de Fourier des fonctions $\tilde{u}^n(x)$ 1-périodiques constantes par morceaux sur les intervalles $]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$, $1 \leq j \leq J$ associées à U^n pour tout $0 \leq n \leq N - 1$ que le θ -schéma est inconditionnellement stable en norme L^2 si $\theta \geq 1/2$ et conditionnellement stable si $\theta < 1/2$ sous la condition de stabilité (dite **condition CFL**) :

$$2(1 - 2\theta)\nu \Delta t \leq \Delta x^2$$

Vérifier que lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ les coefficients de la série de Fourier de la solution discrète sont régis par un schéma aux différences finies en temps qui est la discrétisation de l'équation différentielle obtenue pour les fonctions $\hat{u}_k(t)$ à la question 3.

8. **Convergence en norme L^2 .** Etablir un résultat de convergence en norme L^2 pour le θ -schéma (6). En considérant pour $0 \leq n \leq N$, $\tilde{u}^n(x)$ la fonction 1-périodique constante par morceaux associée à U^n , établir un résultat de conservation de la masse discrète $\int_0^1 \tilde{u}^n(x) dx$ et de décroissance de l'énergie discrète $\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2 dx$. Comparer avec le cas continu (questions 1 et 2).
9. **Stabilité L^2 par méthode énergétique** Nous considérons une approche alternative de la stabilité L^2 qui est utilisée dans des cas plus généraux que l'analyse par Fourier (coefficients non constants par exemple). On note pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$U^{n+\theta} = \theta U^{n+1} + (1-\theta)U^n$$

Etablir l'identité d'énergie :

$$\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|_2^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|_2^2 + \frac{1}{2}(2\theta-1)\|U^{n+1}-U^n\|_2^2 + C_{od}(BU^{n+\theta}, U^{n+\theta}) = 0$$

La matrice B étant symétrique positive, on rappelle (TD n° 1) que pour tout $X \in \mathbb{R}^J$

$$\langle BX, X \rangle_2 \leq \|B\|_2 \|X\|_2^2 \quad \text{et} \quad \|BX\|_2^2 \leq \|B\|_2 \langle BX, X \rangle_2$$

et que les majorations sont optimales. Montrer que $\|B\|_2 \leq 4$. Retrouver les résultats précédents de stabilité L^2 .

Exercice 2

Equation de diffusion-chaleur : implémentation numérique

On s'intéresse à résoudre numériquement l'équation diffusion-chaleur avec conditions de Neumann au bord :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in]a, b[\times]0, T[, \\ u(x, 0) = u^0(x) & \forall x \in]a, b[, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0 & \forall t \in]0, T] \end{cases} \quad (5)$$

On prendra $a = 0$, $b = 1$ et $\nu = 1$.

Soit $\theta \in [0, 1]$ un paramètre réel. On considère un entier $N > 0$ et le pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$. On introduit pour tout $0 \leq n \leq N$, $t^n = n\Delta t$ l'instant discret. On considère par ailleurs un entier $J > 0$ et le pas d'espace $\Delta x = \frac{1}{J}$. On introduit les points discrets $x_j = j\Delta x$ pour tout $0 \leq j \leq J+1$. On considère l'approximation par différences finies de l'équation de la chaleur par le θ -schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \theta \nu \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1-\theta)\nu \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (6)$$

pour tout $0 \leq n \leq N - 1$ et pour tout $1 \leq j \leq J - 1$. On considère les conditions approchées de Neumann d'ordre 2 :

$$\frac{U_0^{n+1} - U_0^n}{\Delta t} - \theta \nu \frac{2U_1^{n+1} - 2U_0^{n+1}}{\Delta x^2} - (1 - \theta) \nu \frac{2U_1^n - 2U_0^n}{\Delta x^2} = 0$$

et

$$\frac{U_J^{n+1} - U_J^n}{\Delta t} - \theta \nu \frac{-2U_J^{n+1} + 2U_{J-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1 - \theta) \nu \frac{-2U_J^n + 2U_{J-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

et la condition initiale de démarrage en $n = 0$

$$\forall 1 \leq j \leq J, \quad U_j^0 = u^0(x_j).$$

On introduit le nombre adimensionnel (appelé nombre de Courant diffusif)

$$Co_d = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}$$

1. **Implémentation et étude de la stabilité** du θ -schéma pour $\theta = 0$ (explicite), $\theta = 1$ (implicite) et $\theta = 0.5$ (Crank-Nicolson). On prendra pour condition initiale la fonction régulière

$$u^0(x) = 1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

et on commentera la solution obtenue au temps $T = 1$. Que se passe-t'il si on prend la donnée irrégulière u^0 ?

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0.25 < x < 0.75 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. **Étude de la convergence** des schémas précédents. On prendra pour condition initiale le L -ème mode de Fourier

$$u^0(x) = \cos(\pi Lx)$$

pour lequel on connaît la solution exacte de l'équation de la chaleur et à nombre de Courant fixé, on tracera en échelle log l'erreur en norme L^2 pour différentes valeurs de J entre la solution exacte et la solution approchée.

Eléments de Correction

Exercice 1

Equation de diffusion-chaleur

1. **Conservation de la masse (pour une équation de diffusion)** Soit $t \in]0, T[$, pour tout $s \in [0, t]$, on intègre en espace sur $[0, 1]$ l'équation (5) :

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, s) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) \right) dx = 0$$

soit par intégration directe en espace,

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 u(x, s) dx = \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right]_{x=0}^{x=1} = 0$$

en utilisant la 1-périodicité en espace de $u(x, t)$ et de ses dérivées. On obtient par intégration en temps sur $[0, t]$ la conservation de la masse.

2. **Décroissance de l'énergie.** Soit $t \in]0, T[$, pour tout $s \in [0, t]$, on intègre en espace sur $[0, 1]$ l'équation (5) multipliée par $u(x, s)$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) u(x, s) dx - \nu \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) u(x, s) dx = 0$$

soit par intégration par parties en espace

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_0^1 |u(x, s)|^2 dx &= -\nu \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right|^2 dx + \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, s) u(x, s) \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\nu \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right|^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

en utilisant la 1-périodicité en espace de $u(x, t)$ et de ses dérivées. On obtient par intégration en temps sur $[0, t]$ la décroissance de l'énergie $\frac{1}{2} \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx$. Plus généralement, soit $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe ($\eta''(v) \geq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}$), en intégrant en espace sur $[0, 1]$ l'équation (5) multipliée par $\eta'(u(x, s))$, on obtient de même (intégration par parties et 1-périodicité de u) :

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 \eta(u(x, s)) dx = -\nu \int_0^1 \eta''(u(x, s)) \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) \right|^2 dx \leq 0$$

grâce à la convexité de η . On en déduit que :

$$\int_0^1 \eta(u(x, t)) dx \leq \int_0^1 \eta(u^0(x)) dx.$$

Il s'agit d'une propriété de décroissance de l'entropie $\int_0^1 \eta(u(x, t)) dx$. Pour $\eta(v) = \frac{1}{2}v^2$, on retrouve la décroissance de l'énergie).

3. **Décomposition en série de Fourier en espace (périodicité).** Sous réserve de régularité suffisante, on dérive en temps sous le signe somme la série de Fourier (2) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d}{dt} \hat{u}_k(t) e^{2i\pi kx}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2i\pi k)^2 \hat{u}_k(t) e^{2i\pi kx}$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient en utilisant la décomposition en série de Fourier de u^0 suffisamment régulière notée $\hat{u}_k^0, \forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}_k(t) + 4\pi^2 k^2 \nu \hat{u}_k(t) = 0 & \forall t \in]0, T[, \\ \hat{u}_k(0) = \hat{u}_k^0 \end{cases}$$

Par suite

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k^0 e^{-4\pi^2 k^2 \nu t}$$

La décroissance est d'autant plus rapide que k est grand, c'est l'effet régularisant de l'équation de la chaleur.

4. **Discrétisation par un θ -schéma en temps.** Le schéma (6) s'écrit pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$(I + \theta C_{od} B) U^{n+1} = (I - (1 - \theta) C_{od} B) U^{n+1}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ associée à la norme sur $\mathbb{R}^J$, définie pour tout $X \in \mathbb{R}^J$ par $\|X\|_2 = \left(\sum_{j=1}^J \Delta x |X_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. On considère X et Y deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^J$ et on leur associe les conditions de 1-périodicité $X_0 = X_J, X_{J+1} = X_1, Y_0 = Y_J, Y_{J+1} = Y_1$, alors en effectuant une intégration par parties discrètes

$$\begin{aligned} \langle BX, Y \rangle_2 &= \Delta x \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J B_{ij} X_j Y_i = \Delta x \sum_{i=1}^J (-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1}) Y_i \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^J (X_i - X_{i+1}) Y_i + \Delta x \sum_{i=1}^J (X_i - X_{i-1}) Y_i \\ &= \Delta x \sum_{i=0}^J (X_i - X_{i+1}) Y_i + \Delta x \sum_{i=1}^J (X_i - X_{i-1}) Y_i \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^J (X_{i-1} - X_i) Y_{i-1} + \Delta x \sum_{i=1}^J (X_i - X_{i-1}) Y_i \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^J (X_i - X_{i-1}) (Y_i - Y_{i-1}) \\ &= \langle X, BY \rangle_2 \end{aligned}$$

On a en particulier pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^J$

$$\langle BX, X \rangle_2 = \Delta x \sum_{i=1}^J (X_i - X_{i-1})^2 \geq 0$$

La matrice B est symétrique positive mais elle n'est pas définie : si $\langle BX, X \rangle_2 = 0$ alors pour tout $1 \leq i \leq J$, $X_0 = X_1 = \dots = X_{i-1} = X_i = \dots = X_J$, tout vecteur constant est dans le noyau de B . La somme des lignes ou des colonnes étant nulle, on retrouve que la matrice B ne peut être inversible et a pour noyau $\text{Vect}(1 \dots 1)$. Remarquons que $-u''(x) = 0$ sur $]0, 1[$ avec condition de 1-périodicité $u(0) = u(1)$ a pour solution l'ensemble des constantes. Par suite $I + \theta C_{0d} B$ est symétrique définie positive et donc inversible ce qui justifie l'existence de son inverse B_I^θ .

5. **Erreur de convergence / erreur de troncature.** Pour tout $0 \leq n \leq N - 1$, on définit $\eta^n \in \mathbb{R}^J$ par

$$\Delta t \eta^n := (B_I^\theta)^{-1} \bar{U}^{n+1} - B_E^\theta \bar{U}^n.$$

La relation entre e^{n+1} , e^n et η^n est immédiate. Pour tout $1 \leq j \leq J$,

$$\eta_j^n = \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} - \theta \nu \frac{\bar{U}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{U}_j^{n+1} + \bar{U}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (1 - \theta) \nu \frac{\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

6. **Consistance.** On suppose $u(x, t)$ suffisamment régulière pour effectuer les développements de Taylor.

$$\frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} = \theta \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \tilde{U}_j^n}{\Delta t} + (1 - \theta) \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t}$$

On effectue respectivement pour chacun des deux termes un développement de Taylor à l'ordre 3 en temps en t^{n+1} respectivement t^n , il vient :

$$\theta \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} = \theta \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^{n+1}) \right] + O(\Delta t^2)$$

et

$$(1 - \theta) \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} = (1 - \theta) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) \right] + O(\Delta t^2)$$

En effectuant le développement à l'ordre 4 en espace des 2 autres termes intervenant dans η_j^n il vient :

$$-\theta \nu \frac{\bar{U}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{U}_j^{n+1} + \bar{U}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = -\theta \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^{n+1}) + O(\Delta x^2)$$

et

$$-(1 - \theta) \nu \frac{\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n}{\Delta x^2} = -(1 - \theta) \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2)$$

En regroupant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\eta_j^n &= \theta \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^{n+1}) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^{n+1}) \right] + (1 - \theta) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) \right] \\
&\quad - \theta \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^{n+1}) + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \\
&= -\theta \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^{n+1/2}) + O(\Delta t) \right] + (1 - \theta) \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^{n+1/2}) + O(\Delta t) \right] \\
&\quad + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \\
&= (1 - 2\theta) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^{n+1/2}) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

où on a noté $t^{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$. Le schéma (6) est donc consistant au moins à l'ordre 1 en temps et 2 en espace. Dans le cas où $\theta = 1/2$ il est d'ordre 2 en temps, ce schéma est appelé schéma de Crank-Nicolson. L'ordre maximal est obtenu si u est de classe $\mathcal{C}^4$ en espace et de classe $\mathcal{C}^2$ en temps pour $\theta \neq 1/2$ et de classe $\mathcal{C}^3$ en temps pour $\theta = 1/2$.

7. Stabilité L^2 du θ -schéma par analyse de Fourier. Rappelons le principe de l'étude de la stabilité L^2 par analyse de Fourier

(a) Pour tout $0 \leq n \leq N - 1$, on introduit la fonction $\tilde{u}^n(x)$, 1-périodique, constante par morceaux telle que pour tout $1 \leq j \leq J$:

$$\tilde{u}^n(x) = U_j^n \quad \forall x \in]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$$

(b) On décompose la fonction $\tilde{u}^n(x)$ en série de Fourier, $\forall x \in [0, 1]$

$$\tilde{u}^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k^n e^{2i\pi kx}$$

avec $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{u}_k^n = \int_0^1 \tilde{u}^n(x) e^{-2i\pi kx} dx$$

(c) On utilise la formule de Plancherel qui relie le produit scalaire dans $L^2([0, 1])$ au produit scalaire dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des coefficients de la série de Fourier

$$\int_0^1 u(x) \overline{v(x)} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k \overline{\hat{v}_k}$$

pour obtenir les relations entre norme $\|\cdot\|_2$ dans $\mathbb{R}^J$ et norme L^2 dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (on a le même résultat pour les produits scalaires associés).

$$\begin{aligned}
\|U^n\|_2^2 &= \sum_{j=1}^J \Delta x |U_j^n|^2 = \sum_{j=1}^J \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} |U_j^n|^2 dx \\
&= \sum_{j=1}^J \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} |\tilde{u}^n(x)|^2 dx = \|\tilde{u}^n\|_{L^2([0,1])}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k^n|^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé la 1-périodicité de $\tilde{u}^n$.

- (d) On déduit du schéma aux différences finies une relation de la forme $\hat{u}_k^{n+1} = A_k \hat{u}_k^n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour cela on utilise le fait que la transformation en série de Fourier transforme un opérateur de translation en multiplication par un complexe : soit v une fonction 1-périodique et δ un réel, on note $v(\cdot + \delta)$ la fonction translatée de δ , on a

$$\begin{aligned} \widehat{v(\cdot + \delta)}_k &= \int_0^1 v(x + \delta) e^{-2i\pi kx} dx = \int_\delta^{1+\delta} v(y) e^{-2i\pi k(y-\delta)} dy \\ &= e^{+2i\pi k\delta} \int_\delta^{1+\delta} v(y) e^{-2i\pi ky} dy = e^{+2i\pi k\delta} \int_0^1 v(y) e^{-2i\pi ky} dy \\ &= e^{+2i\pi k\delta} \hat{v}_k \end{aligned}$$

On établit alors la condition pour laquelle $|A_k| \leq 1$ pour tout mode $k \in \mathbb{Z}$ dite condition de stabilité de Von Neumann.

- (e) Sous cette condition, on déduit que pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\|U^n\|_2 = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k^n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k^0|^2 \right)^{1/2} = \|U^0\|_2$$

qui assure la stabilité L^2 du schéma.

Le θ -schéma (6) se réécrit sous la forme, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$U^{n+1} = B_I^\theta B_E^\theta U^n = A^\theta U^n,$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}^{n+1}(x) - \tilde{u}^n(x)}{\Delta t} &- \theta \nu \frac{\tilde{u}^{n+1}(x + \Delta x) - 2\tilde{u}^{n+1}(x) + \tilde{u}^{n+1}(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \\ &- (1 - \theta) \nu \frac{\tilde{u}^n(x + \Delta x) - 2\tilde{u}^n(x) + \tilde{u}^n(x - \Delta x)}{\Delta x^2} = 0. \end{aligned}$$

En observant que

$$e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x} = 2(\cos(2\pi k\Delta x) - 1) = -4 \sin^2(\pi k\Delta x)$$

il vient par transformation en série de Fourier pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(1 + 4\theta C_o_d \sin^2(\pi k\Delta x)) \hat{u}_k^{n+1} = (1 - 4(1 - \theta) C_o_d \sin^2(\pi k\Delta x)) \hat{u}_k^n.$$

D'où comme $1 + 4\theta C_o_d \sin^2(\pi k\Delta x) \geq 1$ (ce qui remontre que la matrice B_I^θ est inversible),

$$A_k^\theta = 1 - \frac{4C_o_d \sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + 4\theta C_o_d \sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 1$$

La condition de stabilité de Von Neumann s'écrit donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $A_k^\theta \geq -1$, soit

$$\frac{4C_o_d \sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + 4\theta C_o_d \sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 2$$

ou encore

$$2C_o_d(1 - 2\theta) \sin^2(\pi k\Delta x) \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sous la condition $2Co_d(1 - 2\theta) \leq 1$, le critère est vérifié pour tout k . Si $1 - 2\theta \leq 0$, la stabilité est inconditionnelle. Si $1 - 2\theta > 0$, on a stabilité sous la condition

$$Co_d \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$$

soit en utilisant les pas de temps et d'espace

$$\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)} \quad \text{si } \theta < \frac{1}{2}$$

Quand $\Delta x \rightarrow 0$, on a $\sin^2(\pi k \Delta x) \simeq \pi^2 k^2 \Delta x^2 = \pi^2 k^2 \nu \Delta t / Co_d$, et donc $A_k^\theta \rightarrow A_k^{\theta,0}$ avec

$$A_k^{\theta,0} = 1 - \frac{4\pi^2 k^2 \nu \Delta t}{1 + 4\theta \pi^2 k^2 \nu \Delta t}$$

En réécrivant $\hat{u}_k^{n+1} = A_k^{\theta,0} \hat{u}_k^n$, on obtient le schéma :

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n}{\Delta t} + 4\theta \pi^2 k^2 \nu \hat{u}_k^{n+1} + 4(1 - \theta) \pi^2 k^2 \nu \hat{u}_k^n = 0$$

qui n'est autre que la discrétisation par un θ -schéma en temps de l'équation différentielle vérifiée par les fonctions $\hat{u}_k(t)$ coefficients de Fourier de la solution exacte. La condition de stabilité sur $A_k^{\theta,0}$ est comme $A_k^{\theta,0} \leq 1$ est toujours vérifiée,

$$4\pi^2 k^2 \nu \Delta t (1 - 2\theta) \leq 2$$

En notant $a_k = 4\pi^2 k^2 \nu$, on étend les résultats obtenus au TD précédent pour les schémas Euler implicite et explicite à tous les θ -schémas d'Euler : Si $1 - 2\theta \leq 0$, il y a stabilité inconditionnelle (en particulier pour $\theta = 1$ Euler implicite), si $1 - 2\theta > 0$, on a stabilité sous la condition :

$$\Delta t \leq \frac{2}{a_k(1 - 2\theta)}$$

(en particulier on retrouve $\Delta t \leq \frac{2}{\|A\|}$ pour $\theta = 0$ Euler explicite).

8. **Convergence en norme L^2 .** On regroupe les résultats de consistance et de stabilité. On a par récurrence immédiate, e^0 étant nul, d'après (4), pour tout $0 \leq n \leq N - 1$,

$$e^{n+1} = -\Delta t \sum_{k=0}^n [B_I^\theta B_E^\theta]^{n-k} (B_I^\theta) \eta^k$$

Donc pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\|e^n\|_2 \leq \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|A^\theta\|_2^{n-1-k} \|B_I^\theta\|_2 \|\eta^k\|_2$$

Nous avons montré à la question précédente que $\|A^\theta\|_2 \leq 1$ (sous condition CFL si $\theta < 1/2$). De plus $\|B_I^\theta\|_2 \leq 1$, en effet si $Y = B_I^\theta X$, il vient $(I + \theta Co_d B)Y = X$ et donc par positivité de B

$$\|Y\|_2^2 = \langle Y, Y \rangle \leq \langle Y, Y \rangle + \langle \theta Co_d B Y, Y \rangle = \langle X, Y \rangle \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$$

soit $\|Y\|_2 = \|B^\theta X\|_2 \leq \|X\|_2$. On peut aussi démontrer ce résultat par transformée de Fourier : l'opérateur B_j^θ devient le facteur multiplicatif pour chaque mode $k \in \mathbb{Z}$:

$$(B_I^\theta)_k = \frac{1}{1 + 4\theta C_{O_d} \sin^2(\pi k \Delta x)} \leq 1$$

Enfin on utilise le résultat de consistance : pour tout $0 \leq k \leq n-1$

$$\|\eta^k\|_2 = \left(\sum_{j=1}^J \Delta x |\eta_j^k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_u (\Delta t^\alpha + \Delta x^2)$$

avec $\alpha = 1$ si $\theta \neq 1/2$, $\alpha = 2$ sinon. On obtient le résultat de convergence, pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\|e^n\|_2 \leq TC_u (\Delta t^\alpha + \Delta x^2)$$

sous la condition $2(1-2\theta)\nu\Delta t \leq \Delta x^2$ si $\theta < 1/2$ et pour tout Δt si $\theta \geq 1/2$.

Considérons maintenant la fonction 1-périodique $\tilde{u}^n$. On a pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 \tilde{u}^{n+1}(x) dx = \sum_{j=1}^J \Delta x U_j^{n+1}$$

Pour tout vecteur $X = (X_j)_{1 \leq j \leq J} \in \mathbb{R}^J$ prolongé par périodicité $X_0 = X_J$ et $X_{J+1} = X_1$, on a

$$\sum_{j=1}^J \Delta x (X_{j+1} - 2X_j + X_{j-1}) = \langle BX, 1 \rangle_2 = \langle X, B1 \rangle_2 = 0$$

où 1 est le vecteur de composantes constantes égales à 1. On en déduit que la solution du θ -schéma vérifie :

$$\sum_{j=1}^J \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = 0.$$

On en déduit la conservation de la masse discrète : pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 \tilde{u}^n(x) dx = \int_0^1 \tilde{u}^0(x) dx = \sum_{j=1}^J \Delta x u^0(x_j)$$

C'est l'équivalent discret du résultat de la question 1, où on a approché $\int_0^1 u^0(x) dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille.

Par ailleurs, pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 |\tilde{u}^{n+1}(x)|^2 dx = \|U^{n+1}\|_2^2$$

et donc par stabilité en norme L^2 du schéma, pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2 dx \leq \|U^0\|_2^2 = \sum_{j=1}^J \Delta x |u^0(x_j)|^2$$

C'est l'équivalent discret du résultat de la question 2, où on a approché $\int_0^1 |u^0(x)|^2 dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille. De plus comme il existe des nombres d'onde pour lesquels $|A_k^\theta| < 1$ cette décroissance est stricte.

9. **Stabilité L^2 par méthode énergétique** Nous considérons une approche alternative de la stabilité L^2 qui est utilisée dans des cas plus généraux que l'analyse par Fourier (coefficients non constants par exemple). Il est immédiat que le schéma (6) se réécrit pour tout $0 \leq n \leq N - 1$

$$U^{n+1} - U^n + Co_d B U^{n+\theta} = 0$$

En prenant le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de l'expression précédente par $U^{n+\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle U^{n+1} - U^n, U^{n+\theta} \rangle + Co_d \langle B U^{n+\theta}, U^{n+\theta} \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2 + (2\theta - 1) \|U^{n+1} - U^n\|_2^2) + Co_d \langle B U^{n+\theta}, U^{n+\theta} \rangle \end{aligned}$$

où on a écrit $U^{n+\theta} = (U^{n+1} + U^n)/2 + (\theta - 1/2)(U^{n+1} - U^n)$. Par suite en utilisant que $U^{n+1} - U^n = -Co_d B U^{n+\theta}$, on a :

$$\frac{1}{2} [\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2] = -Co_d \left[\langle B U^{n+\theta}, U^{n+\theta} \rangle - \frac{(1 - 2\theta) Co_d}{2} \|B U^{n+\theta}\|_2^2 \right]$$

Si $1 - 2\theta \leq 0$, on a inconditionnellement $\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2 \leq 0$ et donc la stabilité L^2 du schéma.

Si $1 - 2\theta > 0$, la stabilité est obtenue si pour tout $0 \leq n \leq N - 1$,

$$\langle B U^{n+\theta}, U^{n+\theta} \rangle - \frac{(1 - 2\theta) Co_d}{2} \|B U^{n+\theta}\|_2^2 \geq 0$$

En écartant le cas trivial où $J = 1$ et B la matrice nulle, on a stabilité si $\frac{(1 - 2\theta) Co_d}{2} \|B X\|_2^2$ est inférieur à $\langle B X, X \rangle$ pour tout $X \in \mathbb{R}^J$. La matrice B étant symétrique positive et donc diagonalisable en base orthonormée avec des valeurs propres $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$, on a

$$\lambda_m = \sup_{X \in \mathbb{R}^J - \{0\}} \frac{\|B X\|_2}{\|X\|_2} = \|B\|_2$$

mais aussi

$$\lambda_m = \sup_{X \in \mathbb{R}^J - \{0\}} \frac{\langle B X, X \rangle}{\|X\|_2^2}$$

et

$$\lambda_m = \sup_{X \in \mathbb{R}^J - \{0\}} \frac{\|B X\|_2^2}{\langle B X, X \rangle}$$

La deuxième expression permet d'estimer $\|B\|_2$:

$$\langle B X, X \rangle = \Delta x \sum_{i=1}^J (X_i - X_{i-1})^2 \leq 2\Delta x \sum_{i=1}^J (X_i^2 + X_{i-1}^2) = 4\|X\|_2^2$$

par périodicité et en utilisant l'inégalité $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. (On pourra vérifier que si J est pair $\|B\|_2 = 4$, et si J est impair, $4(1 - \Delta x) \leq \|B\|_2 \leq 4$).

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$4 \frac{(1 - 2\theta) Co_d}{2} \leq 1$$

soit

$$Co_d \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$$

On retrouve les résultats précédents.