Analyse numérique et optimisation

TD n^{o}1 I. Terrasse

Différences Finies en dimension 1

Exercice 1

Problème de Cauchy

Soient T un réel positif, $A : t \in [0,T] \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$ une fonction continue de $[0,T]$ à valeurs dans l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre m et u^0 un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On s'intéresse au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R}^m) \quad \text{tel que} \\ \dfrac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = 0 \quad \forall t \in]0,T[, \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{1}$$

1. **Cas continu.** Montrer que pour toute donnée initiale $u^0 \in \mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy (1) est bien posé au sens d'Hadamard.
   Dans le cas particulier où $A(t)$ est constante égale à A, expliciter la constante $C_{A,T}$ (qui dépend de A et de T) dans l'estimation de stabilité
   $$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \leq C_{A,T}\|u^0\|$$
   où $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^m$. Commenter la dépendance en T.
   Dans le cas où $A(t)$ est à valeurs dans l'ensemble des matrices positives et en considérant pour $\|.\|$ la norme euclidienne, montrer que l'énergie $\dfrac{1}{2}\|u(t)\|^2$ est décroissante (on dit que A est dissipative) et donc que l'on peut prendre $C_{A,T} = 1$.
   Dans la suite de l'exercice, on considérera que pour tout $t \in [0,T]$, $A(t)$ est à valeurs dans l'ensemble des matrices positives
2. **Schémas d'Euler.** On considère un entier $N > 0$ et le pas de temps $\Delta t = \dfrac{T}{N}$. On introduit pour tout $0 \leq n \leq N$, $t^n = n\Delta t$ l'instant discret. On construit 2 schémas dits respectivement schéma d'Euler explicite (ou progressif) et schéma d'Euler implicite (ou rétrograde) pour approcher la solution u du problème de Cauchy (1). Partant de la donnée initiale u^0, on génère des suites d'approximation de $u(t^n)_{0\leq n\leq N}$ notées respectivement $(u_E^n)_{0\leq n\leq N}$ et $(u_I^n)_{0\leq n\leq N}$ construites en observant que pour Δt petit :
   $$\frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} \simeq \frac{du}{dt}(t^n) \text{ et } \frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} \simeq \frac{du}{dt}(t^{n+1})$$
   Ecrire (en le justifiant) les 2 schémas sous la forme récurrente $u_E^{n+1} = f_E^n(u_E^n)$, respectivement $u_I^{n+1} = f_I^n(u_I^n)$ pour tout $0 \leq n \leq N-1$.
   Dans la suite de l'exercice, on considérera que pour tout $t \in [0,T]$, $A(t)$ est constante égale à $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ positive.
   Les schémas Euler explicite et implicite s'écrivent alors pour tout $0 \leq n \leq N-1$
   $$u_E^{n+1} = B_E\, u_E^n$$
   $$u_I^{n+1} = B_I\, u_I^n$$
   avec B_E et B_I 2 matrices de $\mathbb{R}^{m,m}$ que l'on explicitera.

3. **Propagation des erreurs.** On introduit les suites des erreurs (dites de convergence) $e_E^n = u_E^n - u(t^n)$ et $e_I^n = u_I^n - u(t^n)$. Montrer que pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\begin{array}{rcl} e_E^{n+1} & = & B_E\, e_E^n - \Delta t \eta_E^n \\ e_I^{n+1} & = & B_I(e_I^n - \Delta t \eta_I^n) \end{array} \tag{2}$$

où η_E^n et η_I^n sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ que l'on précisera (ces vecteurs représentent **l'erreur de troncature** et dépendent de la solution exacte). Interpréter les expressions (2). En déduire par récurrence que pour tout $0 \leq n \leq N-1$:

$$\begin{array}{rcl} e_E^{n+1} & = & -\Delta t \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_E^{n-k}\, \eta_E^k \\ e_I^{n+1} & = & -\Delta t \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_I^{n-k+1} \eta_I^k \end{array} \tag{3}$$

4. **Consistance (précision) d'ordre 1.** Montrer qu'il existe une constante C_u ne dépendant que de la solution exacte u telle que pour tout choix de Δt (c'est à dire pour tout choix de N),

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \|\eta_E^n\| \leq C_u \Delta t \qquad \max_{0 \leq n \leq N-1} \|\eta_I^n\| \leq C_u \Delta t$$

On justifiera que la solution exacte u a bien la régularité nécessaire.

5. **Stabilité.** On note $< .,. >$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$ et on note aussi $\|.\|$ la norme matricielle subordonnée sur $\mathbb{R}^{m,m}$. Montrer la stabilité inconditionnelle du schéma d'Euler implicite : pour tout choix de Δt,

$$\|B_I\| \leq 1.$$

On montrera comme dans le cas continu que l'énergie au temps discret est décroissante. Montrer que pour le schéma d'Euler explicite, on a l'identité d'"énergie :

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[\|B_E x\|^2 - \|x\|^2\right] = -\left[(Ax, x) - \frac{\Delta t}{2}\|Ax\|^2\right]$$

On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^m$ tel que $Ax \neq 0$,

$$\|Ax\|^2 \leq M(Ax, x)$$

En déduire la stabilité conditionnelle du schéma d'Euler explicite : pour tout $\Delta t \leq \dfrac{2}{M}$,

$$\|B_E\| \leq 1.$$

On suppose pour le reste de cette question que A est une matrice symétrique. On écarte le cas trivial pour lequel la matrice A est la matrice nulle. On rappelle que sous cette hypothèse la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}^m$ en base orthonormée, et en ordonnant ses valeurs propres sous la forme $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$, on a $\|A\| = \lambda_m > 0$. En utilisant la base propre, retrouver la stabilité inconditionnelle du schéma d'Euler implicite et la stabilité conditionnelle du schéma d'Euler explicite avec la condition :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda_m} = \frac{2}{\|A\|},$$

Comparer avec la condition du cas général.

6. **Convergence.** En déduire sous les hypotèses précédentes sur A, les résultats de convergence à l'ordre 1 suivants :
Schéma d'Euler implicite : il existe une constante C (dépendant de u et de T) telle que pour tout choix de Δt,
$$\max_{0\leq n\leq N} \|e_I^n\| \leq C\Delta t$$
Schéma d'Euler explicite : il existe une constante C (dépendant de u et de T) telle que pour tout Δt assez petit (à préciser),
$$\max_{0\leq n\leq N} \|e_E^n\| \leq C\Delta t$$

Exercice 2

Problème aux limites

Soit le problème aux limites
$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u \in \mathcal{C}^2([0,L]) \quad \text{tel que} \\ -u''(x) = f \quad ,\forall x \in]0,L[, \\ u(0) = a, \\ u(L) = b, \end{cases} \tag{4}$$

où f est une fonction donnée de $\mathcal{C}^0([0,L])$ et a et b des réels donnés.

1. **Cas continu : écriture intégrale** En intégrant 2 fois l''équation différentielle et en utilisant le théorème de Fubini, montrer que
$$u(x) = \int_0^L G(x,s)f(s)\,ds \;+\; a\,\frac{(L-x)}{L} \;+ b\,\frac{x}{L} \tag{5}$$
où pour tout $(x,s) \in [0,1]\times[0,1]$, G dite *fonction de Green* est définie par :
$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{s(L-x)}{L} & \text{si} \;\; 0 \leq s \leq x \leq L, \\ \dfrac{x(L-s)}{L} & \text{si} \;\; 0 \leq x \leq s \leq L. \end{cases} \tag{6}$$
En déduire que le problème (4) est bien posé au sens de Hadamard. On exprimera la dépendance continue en les données du problème sous la forme
$$\|u\|_{\mathcal{C}^2} = \max\Big(\|u\|_{\mathcal{C}^0}, L\|u'\|_{\mathcal{C}^0}, L^2\|u''\|_{\mathcal{C}^0}\Big) \leq C_1\|f\|_{\mathcal{C}^0} + C_2|a| + C_3|b|$$
avec des constantes C_1, C_2, C_3 que l'on précisera.
2. **Cas continu : principe du maximum.** Montrer que si $f \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, alors $u \geq 0$. Noter que cela permet de retrouver l'unicité de la solution du problème (4).
Montrer le résultat de régularité suivant : si pour tout entier $k \geq 0$, $f \in \mathcal{C}^k([0,L])$ alors $u \in \mathcal{C}^{k+2}([0,L])$
Dans la suite de l'exercice, on s'intéressera à la fonction
$$u(x) - \left[a\,\frac{(L-x)}{L} \;+ b\,\frac{x}{L}\right]$$

que l'on continuera à noter $u(x)$ qui est la solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème homogène pour les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u \in \mathcal{C}^2([0,L]) \quad \text{tel que} \\ -u''(x) = f \quad \forall x \in]0,L[, \\ u(0) = 0, \\ u(L) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

3. **Discrétisation.** Soit un entier $J > 0$ et le pas d'espace $\Delta x = \dfrac{L}{J+1}$. On introduit les points discrets $x_j = j\,\Delta x$ pour tout $0 \le j \le J+1$. On considère l'approximation par différences finies :
$$\frac{-U_{j+1} + 2U_j - U_{j-1}}{\Delta x^2} = f(x_j) \quad 1 \le j \le J, \tag{8}$$
avec $U_0 = U_{J+1} = 0$. Ecrire ce schéma sous la forme matricielle
$$AU = F$$
où $U = (U_i)_{1\le i\le J} \in \mathbb{R}^J$ est le vecteur inconnu, en précisant les composantes de la matrice $A \in \mathbb{R}^{J,J}$ et du vecteur $F \in \mathbb{R}^J$.
4. **Problème discret : existence et unicité.** Montrer que la matrice A est symétrique, définie positive : on écrira $< AX, Y >_J$ sous forme symétrique en X et Y, avec $< . >_J$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^J$, pour tout vecteur X, Y de $\mathbb{R}^J$ pour lesquels on notera $X_0 = Y_0 = X_{J+1} = Y_{J+1} = 0$. En déduire que le problème discret admet une et une seule solution.
5. **Principe du maximum discret** Montrer que si $F_j \ge 0$ pour tout $1 \le j \le J$, alors $U_j \ge 0$ pour tout $1 \le j \le J$. On raisonnera pas l'absurde en supposant que $\mu := \min_{1\le j\le J} U_j < 0$ et en considérant l'indice $i \in \{1, \cdots, J\}$ pour lequel le minimum est atteint. En déduire que $A^{-1}_{ij} \ge 0$ pour tout $1 \le i,j \le J$.
6. **Calcul explicite de** A^{-1}. Montrer que pour tout $1 \le i,j \le J$, $\left(A^{-1}\right)_{ij} = \Delta x\, G(x_i, x_j)$ où G est la fonction de Green continue définie par (6). En déduire l'expression explicite de U_j pour tout $1 \le j \le J$ et comparer avec l'expression (5) obtenue pour la solution exacte. Noter que l'on retrouve le principe du maximum discret.
7. **Erreur de convergence / erreur de troncature locale.** Etablir l'équation vérifiée par le vecteur $e \in \mathbb{R}^J$ de composantes $e_j = U_j - \bar{U}_j$ pour tout $1 \le j \le J$ où $\bar{U} = (\bar{U}_i)_{1\le i\le J} = (u(x_i))_{1\le i\le J} \in \mathbb{R}^J$ est le vecteur de composantes la valeur de la solution exacte u du problème (7) aux points discrets. En écrivant cette équation sous la forme $Ae = \eta$, préciser les composantes du vecteur $\eta \in \mathbb{R}^J$ qui correspond à l'erreur de troncature locale.
8. **Consistance du schéma à l'ordre 2**. Montrer que sous l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2([0,L])$, on a
$$\|\eta\|_\infty := \max_{1\le j\le J} |\eta_j| \le C_f\, \Delta x^2,$$
où C_f est une constante à déterminer (en fonction de f).
9. **Stabilité L^∞.** On rappelle que la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|_\infty$ est définie pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{J,J}$ par :
$$\|M\|_\infty = \max_{1\le i\le J} \sum_{j=1}^{J} |M_{ij}|$$

En considérant $w(x)$ la solution exacte pour la donnée f_1 fonction constante égale à 1 sur $[0, L]$ et en justifiant que $\|A^{-1}\|_\infty = \|\bar{W}\|_\infty$, montrer que $\|A^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{L^2}{8}$.

10. **Convergence L^∞.** Déduire des questions précédentes que sous l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$, le schéma aux différences finies (8) est convergent en norme L^∞ et préciser son ordre.
11. **Convergence L^2.** On s'intéresse à la convergence dans une norme faisant intervenir les variations spatiales de l'erreur. Pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^J$, avec les conventions de notation précédentes, on considère les 2 normes suivantes sur $\mathbb{R}^J$:

$$\|X\|_A = \left(\sum_{j=1}^{J+1} \frac{1}{\Delta x}|X_j - X_{j-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \|X\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{J} \Delta x|X_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on note $< . >_A$ et $< . >_2$ les produits scalaires associés.

- Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^J$, $\|X\|_2 \leq L^{1/2}\|X\|_\infty \leq L\|X\|_A$. On écrira que pour tout $1 \leq i \leq J$, $X_i = X_0 + (X_1 - X_0) + \cdots + (X_i - X_{i-1})$.
- Montrer que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^J$, $< X, Y >_A = < AX, Y >_2$. En déduire que $\|e\|_A \leq L\|\eta\|_2$.
- En déduire la convergence du schéma en norme $\|.\|_A$ et norme $\|.\|_2$ et préciser les majorations obtenues.

Eléments de Correction

Exercice 1

Problème de Cauchy

1. **Cas continu.** La fonction $f : (t,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m \mapsto f(t,v) := -A(t)\, v \in \mathbb{R}^m$ est globalement lipschitzienne par rapport à la variable v. En effet pour tout $(t, v1, v2) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \|f(t,v1) - f(t,v2)\| &= \|A(t)(v1-v2)\| \leq \|A(t)\|\, \|v1-v2\| \\ &\leq \left(\max_{s\in[0,T]} \|A(s)\|\right) \|v1-v2\| \end{aligned}$$

où $\|.\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^m$ ainsi que la norme subordonnée sur $\mathbb{R}^{m,m}$. En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (1) admet une et une seule solution qui dépend continûment de la donnée initiale u^0.
Dans le cas particulier où $A(t)$ est constante égale à A, la solution vérifie explicitement :

$$u(t) = e^{-tA}\, u^0$$

et donc

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \leq e^{T\|A\|} \|u^0\|$$

La constante $C_{A,T} = e^{T\|A\|}$ explose exponentiellement quand T tend vers l'infini.
On se place dans le cas où $A(t)$ est à valeurs dans l'ensemble des matrices positives. En notant $< .,. >$ le produit scalaire euclidien, il vient pour tout $t \in]0,T[$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 =< \frac{du(t)}{dt},\, u(t) >= - < A(t)\, u(t),\, u(t) >\leq 0.$$

donc la fonction $t \in [0,T] \mapsto \|u(t)\|^2 \in \mathbb{R}_+$ est décroissante et

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \leq \|u^0\|,$$

donc on peut prendre $C_{A,T} = 1$.

2. **Schémas d'Euler.**
Schéma d'Euler explicite :

$$\begin{cases} u_E^0 = u^0 \\ \dfrac{u_E^{n+1} - u_E^n}{\Delta t} + A(t^n)\, u_E^n = 0 \qquad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} u_E^0 = u^0 \\ u_E^{n+1} = (I - \Delta t A(t^n)\,)\; u_E^n \qquad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Schéma d'Euler implicite :

$$\begin{cases} u_I^0 = u^0 \\ \\ \dfrac{u_I^{n+1} - u_I^n}{\Delta t} + A(t^{n+1})\, u_I^{n+1} = 0 \qquad 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} u_I^0 = u^0 \\ \\ (I + \Delta t A(t^{n+1})\,)\, u_I^{n+1} = u_I^n \qquad 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Les matrices $(I + \Delta t A(t^{n+1})\,)$ sont inversibles car leur noyau est réduit à 0 : en effet soit $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $(I + \Delta t A(t^{n+1})\,)\, x = 0$,

$$0 =< (I + \Delta t A(t^{n+1})\,)\, x, x >= \|x\|^2 + \Delta t < A(t^{n+1}) x, x > \ge \|x\|^2$$

et donc $x = 0$. Le schéma d'Euler implicite s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_I^0 = u^0 \\ \\ u_I^{n+1} = (I + \Delta t A(t^{n+1})\,)^{-1}\, u_I^n \qquad 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Dans le cas où $A(t) = A$ matrice constante positive, les schémas d'Euler explicite et implicite s'écrivent alors pour tout $0 \le n \le N-1$,

$$\begin{aligned} u_E^{n+1} &= (I - \Delta t A)\, u_E^n &= B_E\, u_E^n \\ u_I^{n+1} &= (I + \Delta t A)^{-1}\, u_I^n &= B_I\, u_I^n \end{aligned}$$

soit

$$B_E = I - \Delta t A \qquad B_I = (I + \Delta t A)^{-1}$$

3. **Propagation des erreurs.** Pour les 2 schémas, on a

$$e^{n+1} = B\, e^n - \Delta t \left[\frac{u(t^{n+1}) - B\, u(t^n)}{\Delta t} \right]$$

Pour le schéma d'Euler explicite,

$$\begin{aligned} \eta_E^n &:= \frac{u(t^{n+1}) - B_E\, u(t^n)}{\Delta t} = \frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} + (A\, u)(t^n) \\ &= \frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} - \frac{du}{dt}(t^n) \end{aligned}$$

représente l'erreur que l'on a commise en approchant l'opérateur différentiel et qui fait que la solution exacte ne vérifie pas le schéma discret dite erreur de troncature.
Pour le schéma d'Euler implicite,

$$\begin{aligned} \eta_I^n &:= B_I^{-1} \frac{u(t^{n+1}) - B_I\, u(t^n)}{\Delta t} = \frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} + (A\, u)(t^{n+1}) \\ &= \frac{u(t^{n+1}) - u(t^n)}{\Delta t} - \frac{du}{dt}(t^{n+1}) \end{aligned}$$

représente de même l'erreur que l'on a commise en approchant l'opérateur différentiel et qui fait que la solution exacte ne vérifie pas le schéma discret dite erreur de troncature. On obtient :

$$\begin{aligned} e_E^{n+1} &= B_E\, e_E^n - \Delta t \eta_E^n \\ e_I^{n+1} &= B_I(e_I^n - \Delta t \eta_I^n) \end{aligned}$$

Les expressions précédentes montrent qu'à chaque pas de temps l'erreur est somme de 2 termes, l'un provient de l'erreur au temps précédent qui se propage au temps d'après (ce qui par un effet de boule de neige peut influer sur la convergence, c'est la notion de **stabilité** d'un schéma) et l'autre de l'erreur commise entre les 2 instants t^n et t^{n+1} qui est due au fait que la solution exacte n'est pas solution du schéma discret (mais cette erreur peut être maîtrisée si l'approximation de l'opérateur différentiel est suffisamment précise au moins pour Δt assez petit, c'est la notion de **consistance** d'un schéma). Ces 2 notions stabilité ET consistance sont essentielles pour assurer la convergence d'un schéma d'approximation. Les relations (3) se verifient facilement par réccurence en remarquant que l'erreur au temps initial $e_E^0 = e_I^0 = 0$.

4. **Consistance (précision) d'ordre 1.** La solution exacte u de classe $\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R}^m)$ vérifie :
$$\frac{du}{dt}(t) = -A(t)u(t) \quad \forall t \in]0,T[, \qquad \text{soit } \frac{du}{dt} \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R}^m)$$
et donc est de classe $\mathcal{C}^2([0,T],\mathbb{R}^m)$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$). On peut donc faire un développement de Taylor à l'ordre 2 aux temps t^n : $\exists \tau_E^n \in [t^n, t^{n+1}]$, tel que
$$u(t^{n+1}) = u(t^n) + \Delta t \frac{du}{dt}(t^n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2u}{dt^2}(\tau_E^n)$$
De même, $\exists \tau_I^n \in [t^n, t^{n+1}]$, tel que
$$u(t^n) = u(t^{n+1}) - \Delta t \frac{du}{dt}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2u}{dt^2}(\tau_I^n)$$
Dans les 2 cas explicite et implicite,
$$\max_{0\le n\le N-1} \|\eta^n\| \le \max_{t\in[0,T]} \|\frac{1}{2}\frac{d^2u(t)}{dt^2}\|\ \Delta t$$
En notant $C_u = \max_{t\in[0,T]} \|\frac{1}{2}\frac{d^2u(t)}{dt^2}\|$, on obtient les estimations demandées qui montrent que l'erreur de troncature tend vers 0 à l'ordre 1 quand Δt tend vers 0. On l'appelle erreur de toncature puisque qu'elle correspond à un développement de Taylor tronqué jusqu'à un certain ordre. Le schéma est dit consistant d'ordre 1. Notons que c'est une estimation a priori qui dépend de la solution exacte que l'on ne connait pas puisque justement on en cherche une approximation mais qui permet d'assurer que l'erreur va bien tendre vers 0 puisque le schéma approche correctement l'équation continue.

5. **Stabilité.** Les relations (3) faisant intervenir des puissances des opérateurs B, il convient d'assurer que la norme de ces opérateurs est inférieure où égale à 1. Dans le cas continu, on avait obtenu la décroissance de l'énergie en effectuant le produit scalaire de l'équation au temps t par la solution $u(t)$. Pour le schéma implicite, en posant $y = B_I x$, on choisit de prendre le produit scalaire du schéma par y :
$$0 = <\frac{y-x}{\Delta t} + A\,y, y> = \frac{1}{2\Delta t}(\|y\|^2 - \|x\|^2 + <y-x, y-x>) + <Ay, y>$$

où on a écrit $y = (y+x)/2 + (y-x)/2$, en utilisant que $y - x = -\Delta t A y$

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[\|y\|^2 - \|x\|^2\right] = -\left[< Ay, y > + \frac{\Delta t}{2}\|Ay\|^2\right] \leq 0$$

on en déduit

$$\|y\|^2 \leq \|x\|^2$$

et donc pour tout choix de Δt

$$\|B_I\| \leq 1.$$

On suit la même démarche pour le schéma explicite, en posant $y = B_E x$

$$0 =< \frac{y-x}{\Delta t} + A\,x, x >= \frac{1}{2\Delta t}(\|y\|^2 - \|x\|^2 - < y-x, y-x >) + < Ax, x >$$

où on a écrit $x = (y+x)/2 - (y-x)/2$, en utilisant que $y - x = -\Delta t A x$

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[\|y\|^2 - \|x\|^2\right] = -\left[< Ax, x > - \frac{\Delta t}{2}\|Ax\|^2\right]$$

Si $Ax = 0$ le terme $(Ax, x) - \dfrac{\Delta t}{2}\|Ax\|^2$ est nul, sinon en utilisant l'hypothèse de l'énoncé sur l'opérateur A, il est positif sous la condition :

$$\Delta t \leq \frac{2}{M} \leq \frac{2A(x,x)}{\|Ax\|^2}$$

On en déduit que pour tout $\Delta t \leq \dfrac{2}{M}$,

$$\|B_E\| \leq 1.$$

Soit maintenant A matrice symétrique non identiquement nulle de valeurs propres $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$. Les matrices B_I et B_E diagonalisent dans la même base que A et leurs valeurs propres sont :
pour $B_I = (I + \Delta t A)^{-1}$, $(1 + \Delta t \lambda_k)^{-1}, 1 \leq k \leq m$ qui sont toutes dans l'intervalle $]0, 1]$.
Et par suite

$$\|B_I\| = (1 + \Delta t \lambda_1)^{-1} \leq 1$$

pour $B_E = I - \Delta t A$:

$$1 - \Delta t \lambda_m \leq \cdots \leq 1 - \Delta t \lambda_1 \leq 1$$

Donc sous la condition $-1 \leq 1 - \Delta t \lambda_m$, on a $\|B_E\| \leq 1$. La condition s'écrit encore

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda_m} = \frac{2}{\|A\|},$$

Si on décompose $x \in \mathbb{R}^m$ sur une base orthonormée de vecteurs propres, on obtient :

$$\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \lambda_m \sum_{j=1}^{m} \lambda_i x_i^2 = \lambda_m < Ax, x >= \|A\| < Ax, x >$$

et le maximum est atteint pour le m-ème vecteur propre et donc $M = \lambda_m$, on retrouve la condition générale.

6. **Convergence.** On peut donc rassembler les résultats de consistance et stabilité précédents en utilisant les relations (3) :
   Cas implicite : pour tout $1 \le n \le N$

$$\begin{aligned} \|e_I^n\| &= \Delta t \left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_I^{n-k} \eta_I^k \right\| \le \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|B_I^{n-k} \eta_I^k\| \\ &\le \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \|B_I\|^{n-k} \|\eta_I^k\| \le \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} C_u \Delta t \\ &\le \Delta t N C_u \Delta t = \Delta t T C_u \end{aligned}$$

   d'où le résultat de convergence à l'ordre 1 avec $C = TC_u$.
   Cas explicite : la démonstration est identique sous l'hypothèse de stabilité $\Delta t \le \frac{2}{M}$.

Exercice 2

Problème aux limites

1. **Cas continu : écriture intégrale** On intègre 2 fois l'équation différentielle, il vient $\forall x \in [0, L]$

$$u(x) = -\int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt + cx + d$$

   avec c et d 2 constantes d'intégration. . En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt = \int_0^x \left(\int_s^x f(s)dt \right) ds = \int_0^x (x-s) f(s)ds$$

   et donc

$$u(x) = -\int_0^x (x-s) f(s)ds + cx + d$$

   En utilisant les conditions au bord $u(0) = a$ et $u(L) = b$, on détermine les constantes c et d :

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_0^x (x-s) f(s)ds + \frac{x}{L} \int_0^L (L-s) f(s)ds + a\frac{L-x}{L} + b\frac{x}{L} \\ &= \int_0^x \left(-\frac{L(x-s)}{L} + \frac{x}{L}(L-s) \right) f(s)ds + \frac{x}{L} \int_x^L (L-s) f(s)ds + a\frac{L-x}{L} + b\frac{x}{L} \\ &= \int_0^L G(x,s) f(s)ds \, + \, a\,\frac{(L-x)}{L} \, + b\,\frac{x}{L} \end{aligned}$$

   avec la *fonction de Green* G définie par (6). On en déduit l'existence et unicité de la solution du problème (4) donnée par la formulation explicite (5). De plus, en remarquant que la fonction $G(x, s)$ est positive sur son domaine de définition, $\forall x \in [0, L]$

$$|u(x)| \le \|f\|_{C^0} \int_0^L G(x,s)\, ds + \, |a| \, + \, |b|$$

et $\forall x \in [0, L]$,

$$\begin{aligned}
\int_0^L G(x,s)\, ds &= \frac{(L-x)}{L}\int_0^x s ds + \frac{x}{L}\int_x^L (L-s) ds \\
&= \frac{(L-x)x^2}{2L} + \frac{x(L-x)^2}{2L} = \frac{(L-x)x}{2} \leq \frac{L^2}{8}
\end{aligned}$$

donc

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x\in[0,L]} |u(x)| \leq \frac{L^2}{8}\|f\|_{\mathcal{C}^0} + |a| + |b|$$

En dérivant (5), on obtient $\forall x \in [0, L]$

$$u'(x) = -\frac{1}{L}\int_0^x s f(s) ds + \frac{1}{L}\int_x^L (L-s) f(s) ds - \frac{a}{L} + \frac{b}{L}$$

et donc toujours par un argument de positivité de l'intégrande

$$|u'(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0} \frac{1}{L}\int_0^x s\, ds + \frac{1}{L}\int_x^L (L-s) ds + \frac{|a|}{L} + \frac{|b|}{L}$$

et $\forall x \in [0, L]$,

$$\frac{1}{L}\int_0^x s\, ds + \frac{1}{L}\int_x^L (L-s) ds = \frac{x^2}{2L} + \frac{(L-x)^2}{2L} \leq \frac{L}{2}$$

donc

$$\|u'\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x\in[0,L]} |u'(x)| \leq \frac{L}{2}\|f\|_{\mathcal{C}^0} + \frac{|a|}{L} + \frac{|b|}{L}$$

En dérivant de nouveau, on obtient bien sûr, $\forall x \in [0, L]$:

$$u''(x) = -f(x)$$

et donc la troisième majoration :

$$\|u''\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x\in[0,L]} |u''(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0}$$

La solution dépend donc continûment des données et par suite le problème est bien posé au sens d'Hadamard et

$$\|u\|_{\mathcal{C}^2} = \max\left(\|u\|_{\mathcal{C}^0}, L\|u'\|_{\mathcal{C}^0}, L^2\|u''\|_{\mathcal{C}^0}\right) \leq L^2\|f\|_{\mathcal{C}^0} + |a| + |b|.$$

2. **Cas continu : principe du maximum.** Comme $G(x, s)$ est positive sur son domaine de définition, la représentation intégrale (5) donne immédiatement le principe du maximum : si $f \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, alors $u \geq 0$.

   Remarquons que par linéarité, s'il y a 2 solutions au problème aux limites (4), leur différence est solution du même problème avec f, a et b nulles, le principe du maximum appliqué à f, a, b et $-f, -a, -b$ nous donne l'unicité de la solution.

   Le résultat de régularité découle de l'équation $u'' = -f$. Si $f \in \mathcal{C}^0([0, L])$, on a montré $u \in \mathcal{C}^2([0, L])$. Pour $k \geq 1$, si $f \in \mathcal{C}^k([0, L])$ alors pour tout $1 \leq k' \leq k$, $u^{(k'+2)} = -f^{(k')} \in \mathcal{C}^0([0, L])$ et donc $u \in \mathcal{C}^{k+2}([0, L])$. La solution gagne 2 ordres de régularité par rapport à la donnée f.

3. **Discrétisation.** Par changement d'inconnue on se ramène au problème homogène pour les données aux limites. Le schéma proposé s'écrit

$$AU = F$$

avec la matrice $A \in \mathbb{R}^{J,J}$ et le vecteur $F \in \mathbb{R}^J$:

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \\ \vdots \\ f(x_{J-1}) \\ f(x_J) \end{pmatrix}.$$

4. **Problème discret : existence et unicité.** Un calcul direct montre que pour tout vecteur X, Y de $\mathbb{R}^J$

$$\begin{aligned} < AX, Y >_J &= \sum_{i=1}^{J}\sum_{j=1}^{J} A_{ij}X_jY_i = \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J}(-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1})Y_i \\ &= \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J}(X_i - X_{i+1})Y_i + \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J}(X_i - X_{i-1})Y_i \\ &= \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=0}^{J}(X_i - X_{i+1})Y_i + \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J+1}(X_i - X_{i-1})Y_i \\ &= \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J+1}(X_{i-1} - X_i)Y_{i-1} + \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J+1}(X_i - X_{i-1})Y_i \\ &= \frac{1}{\Delta x^2}\sum_{i=1}^{J+1}(X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{J+1}\frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta x}\frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x} =< X, AY >_J \end{aligned}$$

avec la convention $X_0 = Y_0 = X_{J+1} = Y_{J+1} = 0.$. Nous venons d'effectuer l'équivalent d'une intégration par parties dans le cas discret. On a en particulier pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^J$

$$< AX, X >_J= \sum_{i=1}^{J+1}\left(\frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta x}\right)^2 \geq 0$$

Et si $< AX, X >_J= 0$ alors pour tout $1 \leq i \leq J + 1$, $X_0 = X_1 = \cdots = X_{i-1} = X_i = \cdots = X_J = X_{J+1}$, la nullité aux bords entraîne que $X = 0$. La matrice A est donc symétrique définie positive. Elle diagonalise en base orthonormée et ses valeurs propres sont toutes réelles et strictement positives, en particulier 0 n'est pas valeur propre et par suite la matrice est inversible, le problème discret (8) admet une et une seule solution pour tout $F \in \mathbb{R}^J$.

5. **Principe du maximum discret** Soit F tel que $F_j \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$. Démontrons par l'absurde que $\mu := \min_{1\leq j\leq J} U_j \geq 0$. On suppose $\mu < 0$ et on pose $i \in \{1, \cdots, J\}$ un indice (il en existe au moins 1) pour lequel le minimum est atteint :

$U_i = \min_{1\leq j\leq J} U_j = \mu$. Si $1 < i < J$, alors comme U est solution de $AU = F$ la i-ème ligne s'écrit

$$2U_i - U_{i+1} - U_{i-1} = \Delta x^2 F_i \geq 0$$

par hypothèse sur F. Donc

$$0 \leq (U_i - U_{i+1}) + (U_i - U_{i-1}) = (\mu - U_{i+i}) + (\mu - U_{i-1}) \leq 0$$

car $U_i = \mu$ est un minimum. Donc

$$U_{i-1} = U_i = U_{i+1} = \mu$$

Donc les indices $i-1$ et $i+1$ réalisent aussi le minimum. De proche en proche, $U_1 = U_J = \mu$. On considère alors la première ou la dernière ligne de la matrice$A$:

$$0 \leq \Delta x^2 F_1 = U_1 + (U_1 - U_2) \leq U_1 = \mu < 0$$

ce qui est une contradiction. En remarquant que $U_0 = U_{J+1} = 0$, on peut même écrire si $F_j \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$

$$\mu = \min_{0\leq j\leq J+1} U_j \geq 0$$

qui est l'équivalent pour la solution du schéma discret de principe du maximum démontré dans le cas continu pour la solution exacte.
On considère pour $1 \leq j \leq J$ fixé le vecteur $F^j = (0\cdots 1 \cdots 0) = (\delta_{ij})_{1\leq i\leq J}$ (δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker) et X^j la solution de $AX^j = F^j$. Par construction, $X^j = A^{-1}F^j$ et pour tout $1 \leq i \leq J$, la i-ème ligne s'écrit

$$X_i^j = \sum_{k=1}^{J} A_{ik}^{-1} F_k^j = \sum_{k=1}^{J} A_{ik}^{-1}\delta_{kj} = A_{ij}^{-1}$$

D'après le principe du maximum, comme pour tout $1 \leq i,j \leq J$, $F_i^j = \delta_{ij} \geq 0$, $X_i^j = A_{ij}^{-1} \geq 0$. L'inverse de la matrice A a tous ses coefficients positifs ou nuls.

6. **Calcul explicite de** A^{-1}. Pour le calcul explicite de A^{-1}, d'après la question précédente on doit calculer pour chaque $1 \leq j \leq J$ la solution X^j de $AX^j = F^j$. Si $1 < j \leq J$, les $(j-1)$-èmes premières lignes du système sont à second membre nul. On fixe X_1^j comme paramètre et on obtient successivement

$$\begin{aligned}
&X_2^j = 2X_1^j\\
&X_3^j = 2X_2^j - X_1^j = 4X_1^j - X_1^j = 3X_1^j\\
&\vdots\\
&X_j^j = 2X_{j-1}^j - X_{j-2}^j = 2(j-1)X_1^j - (j-2)X_1^j = j\,X_1^j
\end{aligned}$$

Si $1 \leq j < J$, les $(J-j)$-èmes dernières lignes du système sont à second membre nul. On fixe X_J^j comme paramètre et on obtient successivement

$$\begin{aligned}
&X_{J-1}^j = 2X_J^j = (J+1-(J-1))X_J^j\\
&X_{J-2}^j = 2X_{J-1}^j - X_J^j = 4X_J^j - X_J^j = (J+1-(J-2))X_J^j\\
&\vdots\\
&X_j^j = 2X_{j+1}^j - X_{j+2}^j = 2(J-j)X_J^j - (J-j-1)X_J^j = (J+1-j)\,X_J^j
\end{aligned}$$

Donc pour tout $1 \leq j \leq J$

$$X_i^j = iX_1^j = \frac{i}{j}X_j^j \quad 1 \leq i \leq j \quad \text{ et } X_i^j = (J+1-i)X_J^j = \frac{J+1-i}{J+1-j}X_j^j \quad j \leq i \leq J$$

Pour finir la résolution et trouver l'unique inconnue restante X_j^j, il nous reste à utiliser la j-ème ligne du système en introduisant si besoin $X_0^j = 0 * X_j^j$ ou $X_{J+1}^j = (J+1-(J+1))X_j^j$, soit :

$$\begin{aligned}
\Delta x^2 &= 2X_j^j - X_{j-1}^j - X_{j+1}^j = X_j^j - X_{j-1}^j + X_j^j - X_{j+1}^j \\
&= \frac{j-(j-1)}{j}X_j^j + \frac{J+1-j-(J+1-(j+1))}{J+1-j}X_j^j \\
&= \frac{1}{j}X_j^j + \frac{1}{J+1-j}X_j^j = \frac{J+1}{j(J+1-j)}X_j^j
\end{aligned}$$

Soit en remarquant que $(J+1) = L/\Delta x$ et que les points de la grille $x_i = i\Delta x$

$$X_j^j = \frac{\Delta x}{L}(j\Delta x)(J+1-j)\Delta x = \Delta x\frac{x_j(L-x_j)}{L} = \Delta x G(x_j, x_j)$$

et donc comme $X_i^j = A_{ij}^{-1}$, on obtient explicitement, pour tout $1 \leq i, j \leq J$

$$A_{ij}^{-1} = \Delta x\frac{x_i(L-x_j)}{L} \quad 1 \leq i \leq j \quad \text{ et } A_{ij}^{-1} = \Delta x\frac{x_j(L-x_i)}{L} \quad j \leq i \leq J$$

soit $1 \leq i, j \leq J$, $\left(A^{-1}\right)_{ij} = \Delta x\, G(x_i, x_j)$ où G est la fonction de Green continue définie par (6). Cette fonction étant positive sur toutes les valeurs de x_i et x_j, on retrouve que la matrice A^{-1} a ses coefficients positifs ou nuls et donc le principe du maximum discret. Explicitons la solution U du système $AU = F$: pour tout $1 \leq i \leq J$

$$\begin{aligned}
U_i &= \sum_{j=1}^{J} A_{ij}^{-1}F_j = \Delta x\sum_{j=1}^{J} G(x_i, x_j)F_j = \Delta x\sum_{j=0}^{J} G(x_i, x_j)F_j \\
&= \sum_{j=0}^{J}\int_{x_j}^{x_{j+1}} G(x_i, x_j)f(x_j)ds
\end{aligned}$$

à comparer avec l'expression (5) obtenue pour la solution exacte

$$\begin{aligned}
u(x_i) &= \int_0^L G(x_i, s)f(s)ds = \sum_{j=0}^{J}\int_{x_j}^{x_{j+1}} G(x_i, s)f(s)ds \\
&\simeq \sum_{j=0}^{J}\int_{x_j}^{x_{j+1}} G(x_i, x_j)f(x_j)ds
\end{aligned}$$

quand on approche l'intégrale par une somme de Riemann aux noeuds inférieurs des segments d'intégration.

7. **Erreur de convergence / erreur de troncature locale.** Avec les notations indiquées et comme $u(x)$ vérifie les conditions aux limites homogènes, on a pour tout $1 \leq i \leq J$

$$\begin{aligned}
(Ae)_i &= \left[A(U-\bar{U})\right]_i = (F - A\bar{U})_i = f(x_i) - (A\bar{U})_i \\
&= -u''(x_i) - \frac{-\bar{U}_{i+1} + 2\bar{U}_i - \bar{U}_{i-1}}{\Delta x^2} \\
&= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} - u''(x_i)
\end{aligned}$$

on a donc

$$Ae = \eta$$

où $\eta \in \mathbb{R}^J$ est l'erreur de troncature locale qui vient de l'approximation par différences finies de l'opérateur différentiel et qui fait que $\bar{U}$ ne vérifie pas le schéma (8) (c'est U qui en est solution) : pour tout $1 \leq i \leq J$

$$\eta_i := \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} - u''(x_i)$$

8. **Consistance du schéma à l'ordre 2**. On suppose $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$, donc d'après le résultat de régularité $u \in \mathcal{C}^4([0, L])$, on peut donc effectuer un développement de Taylor à l'ordre 4 centré en x_i pour tout $1 \leq i \leq J$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \Delta x u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta x^4}{24} u^{(4)}(\tau_i^+)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - \Delta x u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta x^4}{24} u^{(4)}(\tau_i^-)$$

avec $\tau_i^+ \in [x_i, x_{i+1}]$ et $\tau_i^- \in [x_{i-1}, x_i]$. Par suite : pour tout $1 \leq i \leq J$

$$|\eta_i| = \left| \frac{\Delta x^2}{24} u^{(4)}(\tau_i^+) + \frac{\Delta x^2}{24} u^{(4)}(\tau_i^-) \right| \leq \frac{\Delta x^2}{12} \|u^{(4)}\|_{\mathcal{C}^0} = \frac{\Delta x^2}{12} \|f''\|_{\mathcal{C}^0}$$

en utilisant que $u^{(4)} = -f''$. On obtient la majoration

$$\|\eta\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq J} |\eta_i| \leq C_f \, \Delta x^2, \qquad \text{avec } C_f = \frac{1}{12} \|f''\|_{\mathcal{C}^0}$$

Le schéma (8) est consistant à l'ordre 2 en espace, il est important de noter que l'ordre supplémentaire a été gagné parce que le schéma était centré en espace mais qu'il n'est atteint que si la donnée et donc la solution sont suffisamment régulières.

9. **Stabilité L^∞.** Si la donnée f est la fonction constante f_1 égale à 1 sur $[0, L]$, comme $f_1'' = 0$, d'après la question précédente

$$\|\eta\|_\infty = 0$$

et donc

$$0 = Ae = A(W - \bar{W})$$

où on a noté $w(x)$ la solution exacte associée à f_1, $W \in \mathbb{R}^J$ la solution du schéma discret obtenue avec $F1$ vecteur discret correspondant et $\bar{W} = (w(x_i))_{1 \leq i \leq J} \in \mathbb{R}^J$. Par suite $W = \bar{W} = A^{-1}F1$. Le vecteur $F1$ a toutes ses composantes égales à 1. Donc, pour tout $1 \leq i \leq J$:

$$\bar{W}_i = \sum_{j=1}^J A_{ij}^{-1}(F1)_i = \sum_{j=1}^J A_{ij}^{-1} = \sum_{j=1}^J |A_{ij}^{-1}|$$

car la matrice A^{-1} a tous ses termes positifs. Par définition des normes vectorielle et matricielle $\|.\|_\infty$,

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq J} \sum_{j=1}^J |A_{ij}^{-1}| = \max_{1 \leq i \leq J} |\bar{W}_i| = \|\bar{W}\|_\infty$$

La solution exacte nulle aux bords de $-w''(x) = 1$ sur $]0, L[$ est $w(x) = \dfrac{x(L-x)}{2}$ qui atteint son maximum en $x = L/2$. Celui-ci vaut $L^2/8$. On obtient donc :

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{L^2}{8}$$

Noter l'analogie avec le résultat obtenu pour le problème continu. L'inverse de A est donc bornée en norme infinie par une constante indépendante de Δx, c'est un résultat dit de stabilité L^∞

10. **Convergence L^∞.** On suppose $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$. D'après les résultats précédents de consistance et stabilité,

$$\|e\|_\infty = \|A^{-1}\eta\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|\eta\|_\infty \leq \frac{L^2}{8} C_f \, \Delta x^2 = \frac{L^2}{96} \|f''\|_{\mathcal{C}^0} \Delta x^2.$$

Le schéma (8) converge en norme L^∞ à l'ordre 2 quand Δx tend vers 0.

11. **Convergence L^2.**

- Soit $X \in \mathbb{R}^J$, pour tout $1 \leq i \leq J$, en posant $X_0 = X_{J+1} = 0$,

$$\begin{aligned} |X_i| &= \left| X_0 + \sum_{j=1}^{i} (X_j - X_{j-1}) \right| = \sum_{j=1}^{i} \Delta x \frac{X_j - X_{j-1}}{\Delta x} * 1 =< \frac{X_j - X_{j-1}}{\Delta x}, 1 >_i \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{i} \Delta x \left| \frac{X_j - X_{j-1}}{\Delta x} \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{i} \Delta x |1|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|X\|_A L^{1/2} \end{aligned}$$

  où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire noté $< .,. >_i$ qui est le produit scalaire $< . >_2$ restreint aux i premières composantes. Par suite

$$\|X\|_\infty \leq L^{1/2} \|X\|_A$$

  De plus,

$$\|X\|_2^2 = \left(\sum_{j=1}^{J} \Delta x |X_j|^2 \right) \leq \|X\|_\infty^2 \left(\sum_{j=1}^{J} \Delta x \right) \leq \|X\|_\infty^2 L$$

  On obtient donc

$$\|X\|_2 \leq \|X\|_\infty L^{1/2} \leq L \|X\|_A$$

  Noter que l'estimation $\|X\|_2 \leq L\|X\|_A$ provient du fait que $X_0 = 0$ et que $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} \Delta x |1|^2$ est bornée. Le résultat précédent devient faux sinon.

- On a établi précédemment le résultat suivant, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^J$,

$$< AX, Y >_J = \sum_{i=1}^{J+1} \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta x} \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x}$$

  Donc

$$< AX, Y >_2 = \Delta x < AX, Y >_J = \Delta x \sum_{i=1}^{J+1} \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta x} \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x} =< X, Y >_A$$

Donc
$$\|e\|_A^2 =< e, e >_A=< Ae, e >_2=< \eta, e >_2\leq \|\eta\|_2\|e\|_2 \leq L\|\eta\|_2\|e\|_A$$
d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $< ., ., >_2$ et les estimations précédentes. Donc$\|e\|_A \leq L\|\eta\|_2$ qui est un résultat de stabilité en norme L^2.

- En utilisant le résultat de consistance précédent, on a :

$$\|e\|_A \leq L\|\eta\|_2 \leq L^{3/2}\|\eta\|_\infty \leq L^{3/2}C_f\,\Delta x^2$$

et
$$\|e\|_2 \leq L\|e\|_A \leq L^{5/2}C_f\,\Delta x^2$$
Le schéma (8) converge en norme L^2 et en norme A à l'ordre 2 quand Δx tend vers 0.