

Schéma aux différences finies pour les phénomènes de propagation

Exercice 1.

Etude de la dispersion numérique du schéma de Yee

Soit le schéma de Yee écrit sous sa forme vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \vec{H}_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + (\vec{C}_h \vec{E}_h^n)_h = 0, & n \geq 1 \\ \frac{1}{c} \frac{\vec{E}_h^n - \vec{E}_h^{n-1}}{\Delta t} + (\vec{B}_h \vec{H}_h^{n-\frac{1}{2}})_h = 0 & n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

avec $\vec{C}_h$ et $\vec{B}_h$ les opérateurs discrets approchant respectivement $\vec{\text{rot}}$ et $-\vec{\text{rot}}$.

L'étude de la dispersion numérique d'un schéma consiste à déterminer pour un vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ fixé quelles sont les solutions particulières de type $e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$.

1) On s'intéresse à l'opérateur de dérivation discret unitaire dans la direction $\vec{e}_x$:

Soit C_h^i agissant sur des suites $u_h = (u_{i, \alpha, \beta})$ de la façon suivante :

$$(C_h^i u_h)_{i+\frac{1}{2}, \alpha, \beta} = \frac{u_{i+1, \alpha, \beta} - u_{i, \alpha, \beta}}{\Delta x}$$

Montrer que :

$$(C_h^i (e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^n - \vec{k} \cdot \vec{x}_{i, \alpha, \beta})})_i)_{i+\frac{1}{2}, \alpha, \beta} = 2i \frac{\sin(\frac{k_x \Delta x}{2})}{\Delta x} e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^n - \vec{k} \cdot \vec{x}_{i+\frac{1}{2}, \alpha, \beta})}$$

On constate que sur des ondes harmoniques, les opérateurs de dérivation discrets agissent comme des opérateurs multiplicatifs.

2) Soit $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ fixé. On cherche les champs électriques et magnétiques discrets sous la forme :

$$\vec{E}_h^n = \vec{E}^0 e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^n - \vec{k} \cdot \vec{x}_h)} \quad \vec{H}_h^{n+\frac{1}{2}} = \vec{H}^0 e^{-i(\omega_{\Delta t, h} t^{n+\frac{1}{2}} - \vec{k} \cdot \vec{x}_h)}$$

avec évidemment x_h positionné au bon point de la grille en fonction des composantes des champs.

Montrer que l'on obtient le système vectoriel :

$$\begin{cases} -2i \frac{1}{c \Delta t} \vec{H}^0 \sin \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} + 2i \vec{k}_h \wedge \vec{E}^0 = 0 \\ -2i \frac{1}{c \Delta t} \vec{E}^0 \sin \frac{\omega_{\Delta t, h} \Delta t}{2} - 2i \vec{k}_h \wedge \vec{H}^0 = 0 \end{cases}$$

où on a noté $\vec{k}_h$ le vecteur :

$$\vec{k}_h = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\frac{k_x \Delta x}{2})}{\Delta x} \\ \frac{\sin(\frac{k_y \Delta y}{2})}{\Delta y} \\ \frac{\sin(\frac{k_z \Delta z}{2})}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

En déduire que les ondes planes harmoniques solutions du schéma de Yee se propageant dans la direction $\vec{k}$ ont des champs $\vec{E}_h$ et $\vec{H}_h$ tels que le trièdre $(\vec{k}_h, \vec{E}_h, \vec{H}_h)$ est direct.

En déduire la relation de dispersion numérique du schéma : relation entre $\omega_{\Delta t, h}$ et $|\vec{k}|$.

Retrouvez la condition de stabilité du schéma de Yee.

Exercice 2.

Analyse des θ -schémas pour l'équation des ondes 1D

On se place en une dimension d'espace dans l'espace infini et on considère la discrétisation de l'équation des ondes scalaire en milieu homogène

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

Dans la suite, on ne prendra pas en compte les conditions initiales en supposant que les schémas de démarrage sont bien choisis. On propose la discrétisation suivante dite θ -schéma :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \big(& \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \\ & + (1 - 2\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \\ & + \theta \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} \big) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

que l'on note de façon condensée

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h(\theta u_h^{n+1} + (1 - 2\theta)u_h^n + \theta u_h^{n-1}) = 0 \quad (4)$$

1) En utilisant les propriétés de l'opérateur A_h , établir une condition suffisante (en fonction de θ) sur le coefficient CFL noté α pour que le schéma proposé puisse à chaque itération déterminer u_h^{n+1} .

2) Analyse de stabilité par énergie.

- a) : On fixe $\theta = 1/4$. Etablir la conservation d'une énergie discrète notée $E_h^{n+\frac{1}{2}}$ que l'on explicitera. Montrer que $E_h^{n+\frac{1}{2}}$ est somme de deux quantités positives. Conclure sur la stabilité du θ -schéma quand $\theta = 1/4$.
- b) : On considère θ quelconque. En exprimant le θ -schéma sous la forme de la somme du $1/4$ -schéma de la question précédente plus un reste, établir
 - si $\theta > 1/4$, $E_h^{n+\frac{1}{2}}$ est encore somme de quantités positives
 - si $\theta < 1/4$, $E_h^{n+\frac{1}{2}}$ n'est somme de quantités positives que sous une condition CFL.
 Conclure sur la stabilité des θ -schémas.

3) Relation de dispersion

- a) Montrer que la relation de dispersion du θ -schéma s'écrit :

$$\sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2} = \alpha^2 \sin^2 \frac{kh}{2} (1 - 4\theta \sin^2 \frac{\omega_{h,\Delta t}(k)\Delta t}{2})$$

- b) Les figures 1 2 3 représentent les courbes de dispersion en fonction de α pour les valeurs suivantes de θ : $-0.75, 0.25, 0.5$. Les figures 4 5 6 représentent les courbes de dispersion en fonction de θ pour les valeurs suivantes de α : $0.5, 1, 1.5$
Analyser les différentes courbes par rapport au schéma explicite.
- c) Proposer 2 θ -schémas à privilégier pour une mise en oeuvre industrielle. 2 cas sont à considérer : maillage très régulier et maillage totalement destructuré.

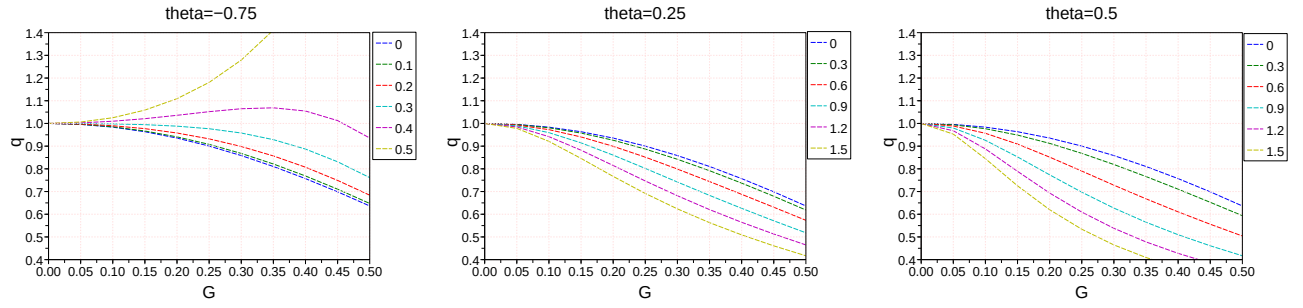


FIG. 1 – Figures 1 2 3

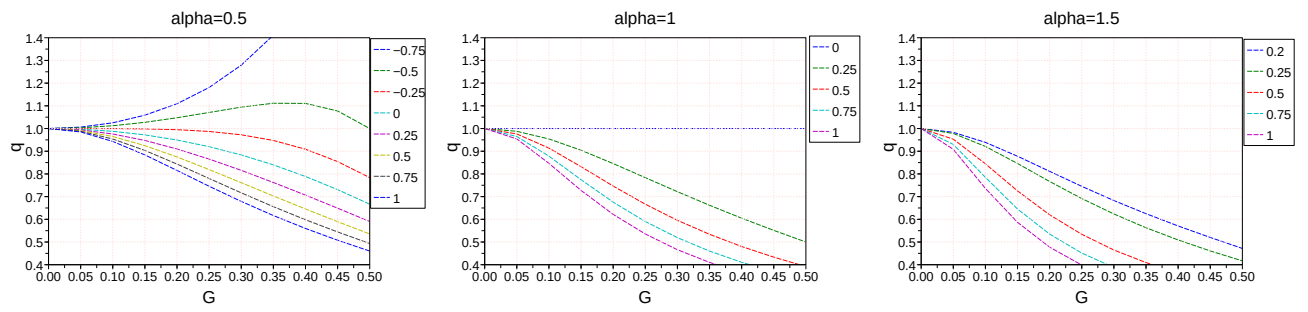


FIG. 2 – Figures 4 5 6