

# Equations intégrales

## Exercice 1.

### Calcul de l'opérateur Dirichlet-Neumann à l'aide des opérateurs intégraux

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma$  assez régulière, on note  $\vec{n}$  la normale extérieure à  $\Omega$ .

1) On se place dans le domaine extérieur et on considère  $u$  la solution du problème de Dirichlet avec donnée  $u_0$  sur le bord.

a) On choisit de prolonger par Dirichlet intérieur avec même donnée au bord. Exprimer  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en fonction de  $u_0$ . En déduire l'expression de l'opérateur de Dirichlet-Neumann.

b) On choisit de prolonger par 0 à l'intérieur. Exprimer  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en fonction de  $u_0$ . En déduire une autre expression de l'opérateur de Dirichlet-Neumann.

c) Montrer que les deux expressions trouvées sont identiques. Sous quelle réserve ?

2) On considère maintenant  $u$  solution du problème de Neumann extérieur avec donnée  $g$  sur le bord.

Etablir de même 2 expressions de la trace  $u_0$  sur le bord de  $u$  en fonction de  $g$ . C'est l'opérateur de Neumann-Dirichlet.

Vérifier qu'il est bien l'inverse de l'opérateur de Dirichlet-Neumann trouvé précédemment.

## Exercice 2.

### Résolution d'un problème de Robin

On s'intéresse au problème de Robin à l'extérieur d'un ouvert borné  $\Omega_i$ . On orientera la normale de l'extérieur vers l'intérieur.

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)p^e = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \frac{\partial p^e}{\partial n} - ik\beta p^e = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

où  $\beta$  est un nombre complexe quelconque à partie réelle strictement positif pour obtenir une condition aux limites dissipative.

1) Proposer 4 prolongements et établir les équations intégrales correspondantes.

2) On choisit de prolonger par le problème suivant de Robin intérieur :

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)p^i = 0 & \text{dans } \Omega^i, \\ \frac{\partial p^i}{\partial n} + ik\beta p^i = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Etablir les équations intégrales correspondantes.