Représentation intégrale et applications

Exercice 1.

Comportement à l'infini des potentiels de simple et douche couche

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ assez régulière, on note $\vec{n}$ la normale extérieure à Ω. On considère un point $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = r\vec{\nu}$, avec $r = |x|$.

1) Montrer que le potentiel de simple couche $\mathcal{S}\lambda(x)$ admet le comportement asymptotique suivant (quand r tend vers l'infini) :

$$\mathcal{S}\lambda(x) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int_\Gamma e^{-ik\nu \cdot y} \lambda(y) d\Gamma(y) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

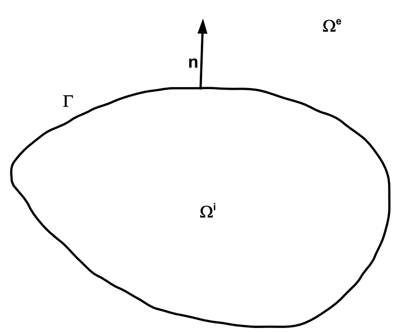
2) Montrer que le potentiel de double couche $\mathcal{D}\mu(x)$ admet le comportement asymptotique suivant (quand r tend vers l'infini) :

$$\mathcal{D}\mu(x) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}(-ik) \int_\Gamma e^{-ik\nu \cdot y} \mu(y)\, n(y) \cdot \nu d\Gamma(y) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Exercice 2.

Projecteurs de Calderón

Soit Γ une surface bornée régulière qui découpe l'espace en deux ouverts : un ouvert borné et un ouvert non-borné. L'ouvert non-borné sera appelé l'ouvert extérieur et noté Ω^e, l'ouvert borné l'ouvert intérieur et sera noté Ω^i. La normale unitaire $\vec{n}$ sur Γ est orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Considérons λ et μ deux fonctions régulières sur Γ. On considère les opérateurs



de simple et double couche :

$$\mathcal{S}\lambda(x) = \int_\Gamma G(x, y\lambda(y)d\Gamma(y)$$

$$\mathcal{D}\mu(x) = \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_y}\mu(y)d\Gamma(y)$$

S et D leur restriction sur Γ, N l'opérateur dérivée normale de $\mathcal{D}$.

1) On pose pour $x \in \Omega^i \cup \Omega^e$

$$p(x) = \mathcal{S}\lambda(x) - \mathcal{D}\mu(x)$$

Montrer que p vérifie l'équation de Helmholtz dans $\Omega^i \cup \Omega^e$. On note p^i et p^e les traces intérieure et extérieure de p sur Γ, q^i et q^e les dérivées normales intérieures et extérieures de p sur Γ.

2) Rappeler l'expression de p^i, p^e, q^i et q^e en fonction de λ et μ. On utilisera l'opérateur H défini en fonction des opérateurs intégraux S, D, D^* et N par :

$$H = \begin{pmatrix} -D & S \\ -N & D^* \end{pmatrix}$$

3) En considérant la fonction qui vaut p dans Ω^i et zéro dans Ω^e, proposez une deuxième représentation intégrale de p dans Ω^i et de ses traces p^i, q^i sur Γ. Faire de même pour la restriction de p à Ω^e et les traces p^e, q^e.

4) En déduire que les opérateurs

$$C_i = \frac{I}{2} + H$$

et

$$C_e = \frac{I}{2} - H$$

sont des projecteurs :

$$C_i^2 = C_i, \quad C_e^2 = C_e$$

De plus montrer que l'on a :

$$C_i \circ C_e = C_e \circ C_i = 0 \quad \text{et} \quad C_i + C_e = I.$$

Expliciter la relation $C_i^2 = C_i$ et en déduire 4 relations remarquables.

Exercice 3.

Modes propres intérieurs de l'équation de Helmholtz

Soit Ω^i un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ assez régulière, on note $\vec{n}$ la normale extérieure à Ω_i. On considère le problème aux valeurs propres :

$$-(\Delta u_n^D + k_n^2 u_n^D) = 0 \qquad \text{dans } \Omega^i$$

avec $u_n^D \in H_0^1(\Omega^i)$. k_n forme une suite qui tend vers l'infini, et les u_n^D forment une base orthogonale de $L^2(\Omega)$. Les sous-espaces propres associés E_n^D sont de dimension finie (d'après l'alternative de Fredholm). Notons

$$\lambda_n^D = \frac{\partial u_n^D}{\partial n}$$

1) Montrer que

$$S\lambda_n^D = 0$$

et

$$\left(-\frac{I}{2} + D^*\right)\lambda_n^D = 0$$

En déduire

$$\left\{\lambda_n^D = \frac{\partial u_n^D}{\partial n} \quad \text{avec } u_n^D \in E_n^D\right\} \subset ker(S)$$

et

$$\left\{\lambda_n^D = \frac{\partial u_n^D}{\partial n} \quad \text{avec } u_n^D \in E_n^D\right\} \subset ker\left(-\frac{I}{2} + D^*\right)$$

2) Réciproquement établir

$$ker(S) = ker\left(-\frac{I}{2} + D^*\right) = \left\{\lambda_n^D = \frac{\partial u_n^D}{\partial n} \quad \text{avec } u_n^D \in E_n^D\right\}$$

3) Conclure sur l'inversibilité de S.