

Analyse de problème de diffraction 3D

Exercice 1.

Dipôles électriques et magnétiques - tenseur élémentaire pour le système de Maxwell dans $\mathbb{R}^3$

Soient $\vec{E}$ et $\vec{H}$ solutions du système de Maxwell avec termes sources courants élémentaires :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} - i\omega\mu_0\vec{H} = -\vec{m}_0\delta(x-y) \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} + i\omega\varepsilon_0\vec{E} = \vec{j}_0\delta(x-y) \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (1)$$

et vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini.

1) En supposant que $\vec{m}_0 = \vec{0}$, montrer que $\vec{E}$ est solution d'une équation d'Helmholtz vectorielle dont on explicitera le second membre.

En utilisant un produit de convolution avec la solution élémentaire scalaire, donner l'expression de $\vec{E}$. En déduire celle de $\vec{H}$.

2) Montrer que les champs solutions de (1) vérifient l'expression suivante (rayonnement des dipôles électriques et magnétiques)

$$\begin{cases} \vec{E}(x) = ikZ_0 \left(1 + \frac{1}{k^2} \vec{\text{grad}} \text{div}\right) G(x,y)\vec{j}_0(y) - \vec{\text{rot}} G(x,y)\vec{m}_0(y) \\ \vec{H}(x) = \vec{\text{rot}} G(x,y)\vec{j}_0(y) + \frac{ik}{Z_0} \left(1 + \frac{1}{k^2} \vec{\text{grad}} \text{div}\right) G(x,y)\vec{m}_0(y) \end{cases} \quad (2)$$

3) En effectuant un développement limité (champ lointain), montrer que les champs électromagnétiques vérifient la relation suivante (dite condition de radiation de Silver-Muller) :

$$r(\vec{E}(r) - Z_0\vec{H}(r) \wedge \vec{e}_r) \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty$$

Exercice 2.

Solutions explicites avec symétrie sphérique

Soit Ω l'intérieur ou l'extérieur de la sphère unité qu'on note S . Toute fonction u définie dans Ω peut se développer en harmoniques sphériques :

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} U_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

1) Si u est solution de l'équation de Laplace dans Ω , montrer que $U_{l,m}(r)$ est combinaison linéaire de 2 solutions de la forme r^α qu'on explicitera. En déduire l'expression générale des solutions de l'équation de Laplace intérieure et extérieure.

2) Si u est solution de l'équation de Helmholtz, montrer que $U_{l,m}(r)$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 dans $\mathbb{R}_+^*$ (*équation de Bessel sphérique*) qu'on explicitera.

3) Résoudre l'équation de Bessel pour $l = 0$. En déduire l'expression de $U_{0,0}$ pour des problèmes intérieurs ou extérieurs.

4) Expliciter pour les solutions intérieures et extérieures des problèmes de Laplace et de Helmholtz la relation reliant les traces u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur toute sphère de rayon $R > 0$.

Exercice 3.

Solution élémentaire de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^3$

Soit $E(x)$ la fonction définie par

$$E(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

1) Montrer que $-(\Delta + k^2)E = 0$ en dehors de l'origine.

2) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, justifier que

$$\langle -(\Delta + k^2)E, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varepsilon)} -E(x) (\Delta + k^2)\varphi(x) dx$$

En déduire que E est bien une solution élémentaire de l'équation de Helmholtz en dimension 3.