- Introduction aux phénomènes de propagation d'ondes
Cas de la dimension 1

Soit le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Exercice 1

Formule de D'Alembert

1) Montrer que la solution du problème (1) est déterminée par la formule de D'alembert :

$$\left\{\begin{array}{ll} u(x,t) & = \dfrac{1}{2}\{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\} \\ & + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\, d\xi. \end{array}\right. \tag{2}$$

2) Ce résultat est-il généralisable aux dimensions supérieures en espace ?

3) Expliciter le cône de dépendance, le cône de propagation.

Exercice 2

Conservation de l'énergie

On associe à toute solution u de (1) la densité d'énergie :

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\left(|\frac{\partial u}{\partial t}|^2(x,t) + c^2 |\frac{\partial u}{\partial x}|^2(x,t) \right). \tag{3}$$

On dit que la solution u est d'énergie finie dès que :

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} e(x,t)\, dx < +\infty, \tag{4}$$

où $E(t)$ est par définition l'énergie totale de la solution.

1) Montrer que

$$\frac{d}{dt}\{E(t)\} = 0. \tag{5}$$

2) En déduire l'unicité de la solution de (1).

Exercice 3

Ondes planes harmoniques- Analyse de Fourier

On introduit la transformée de Fourier en espace définie dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$ par :

$$u(x) \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{u}(k) = \mathcal{F}u(k) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-ikx}\, dx \in C^0(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Cette transformation est inversible et lorsque $\hat{u}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ on a la transformée de Fourier inverse :

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k)e^{ikx}\, dk. \tag{7}$$

A la fonction $u(x,t)$ solution de (1) nous associons donc sa transformée de Fourier en x :

$$\hat{u}(k,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

1) Résoudre le problème de Cauchy (1) en utilisant $\hat{u}(k,t)$.

2) Retrouver la formule de d'Alembert (2) .

Exercice 4

Fonction de Green

On introduit $\delta^\varepsilon(x)$ définie par

$$\delta^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \text{ si } |x| < \varepsilon, \quad \delta^\varepsilon(x) = 0 \text{ sinon .}$$

et le problème de Cauchy associé :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u^\varepsilon(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = \delta^\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

1) Montrer à l'aide de la formule de D'Alembert (2) que, lorsque $\varepsilon \to 0$, on a :

$$u^{\varepsilon}(x,t) \to G(x,t) \text{ presque partout}$$

où la fonction $G(x,t)$ est donnée par :

$$\begin{cases} G(x,t) = \dfrac{1}{2c}, & \text{si } x \in [-ct, ct], \\ G(x,t) = 0, & \text{si } |x| > ct. \end{cases} \tag{10}$$

2) Vérifier que

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds \tag{11}$$

est solution de l'équation des ondes avec second membre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 0. & x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{12}$$

Exercice 5

Cas du demi-espace : principe des images

On se place désormais dans le demi-espace $x > 0$. Soit le problème de Cauchy associé à l'une ou (exclusif) l'autre condition aux limites de type Dirichlet homogène ou Neumann homogène :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0 \quad \textbf{ou} \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{13}$$

1) Etablir la conservation de l'énergie. En déduire l'unicité de la solution du problème (13) pour chacune des conditions aux limites.

2) Problème de Dirichlet.
On définit $\tilde{u}_0$ et $\tilde{u}_1$ prolongements "par imparité" des solutions initiales u_0 et u_1 du problème (13) :

$$\begin{cases} \tilde{u}_0(x) = u_0(x) \quad \text{si } x > 0, & \tilde{u}_0(x) = -u_0(-x) \quad \text{si } x < 0, \\ \tilde{u}_1(x) = u_1(x) \quad \text{si } x > 0, & \tilde{u}_1(x) = -u_1(-x) \quad \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Soit $\tilde{u}(x,t)$ la solution du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ associé aux données initiales $\tilde{u}_0$ et $\tilde{u}_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0) = \tilde{u}_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{15}$$

Montrer que la solution $u(x,t)$ du problème (13) avec condition de Dirichlet homogène est la restriction au demi-espace $x > 0$ de la solution $\tilde{u}(x,t)$ du problème (15).

3) Résoudre de même le problème de Neumann homogène.